

Water & Liquids Simulation (Godot)

17.06.26

Melanie Michel

Übersicht

1. Fluidodynamik

- 1. Navier-Stokes Gleichungen

2. Flüssigkeitssimulation

- 1. Smoothed Particle Hydrodynamics

3. Ozeansimulation

- 1. Höhenfelder

- 2. Shaders

4. Godot

Fluidodynamik

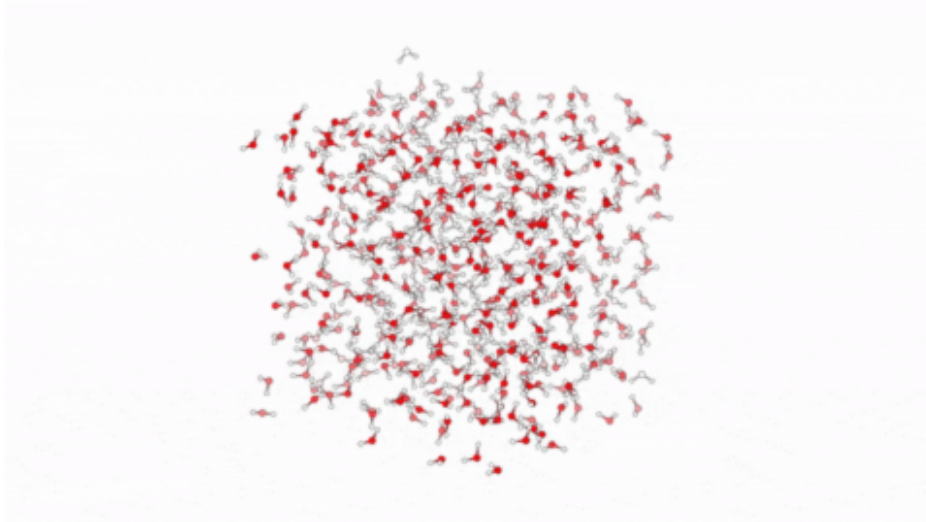
Ziel

Ein **Modell**, dass das **Verhalten** von **Fluiden** beschreibt.

Ziel

Ein **Modell**, dass das **Verhalten** von **Wasser** beschreibt.

Wasser Realität



- Wasser besteht aus vielen **Molekülen**
- Einzelne Moleküle bewegen sich sehr **unterschiedlich**

Bild: By Kmckiern - Own work, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=66200336>

Averaging

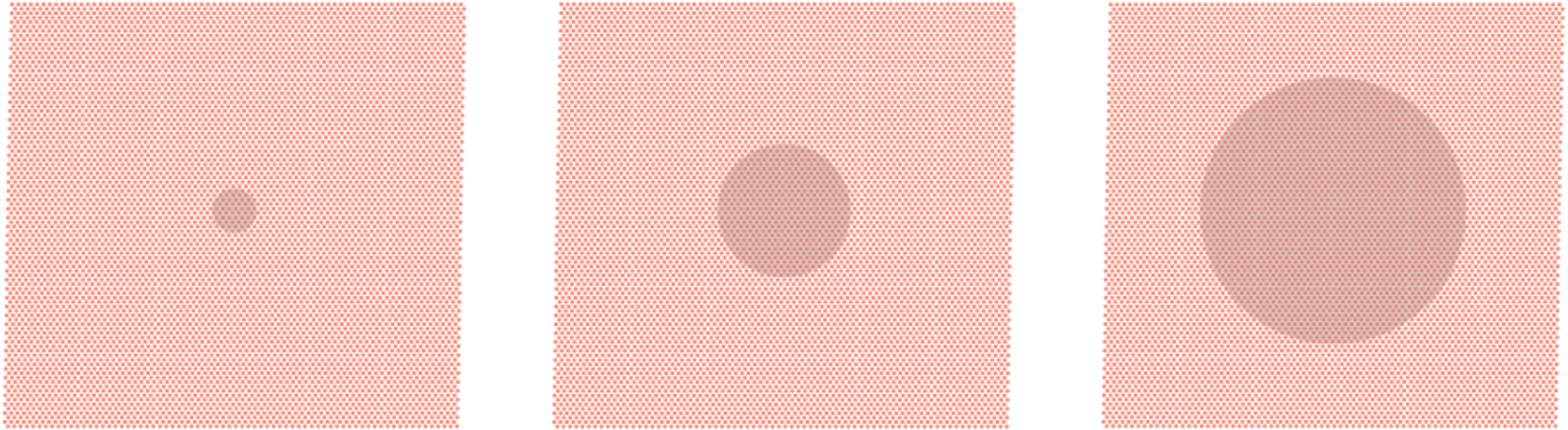
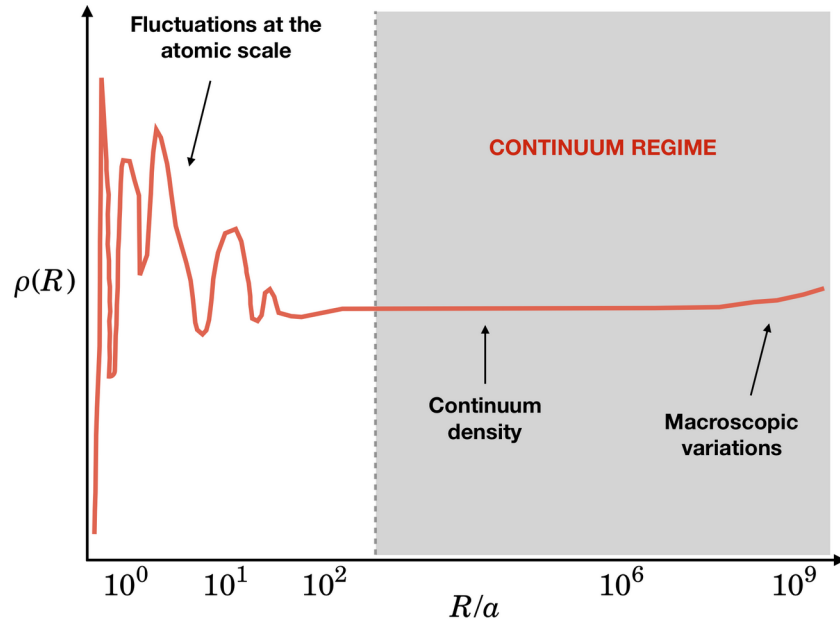


Bild: <https://amuthan.github.io/continuumMechanics/intro/>

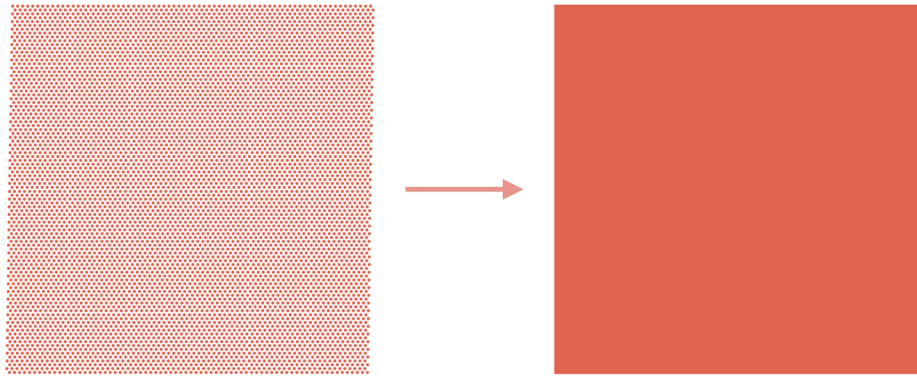
Averaging



- Fluktationen bei Atomgröße
- Makroskopische Variation
- Dazwischen **konstant!**

Bild: <https://amuthan.github.io/continuumMechanics/intro/>

Kontinuumshypothese



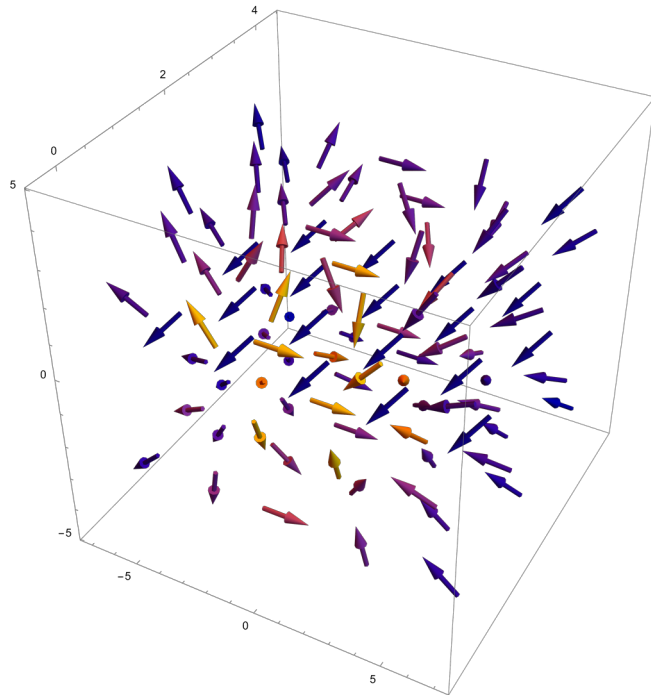
- **Feld** aus
unendlich
kleinen
Fluidteilchen

Bild: <https://amuthan.github.io/continuumMechanics/intro/>

Kontinuumshypothese

- Atomare Komplexität **abstrahiert**
- Diskretes System als **kontinuierliches** Feld
⇒ Analysis

Geschwindigkeitsfeld

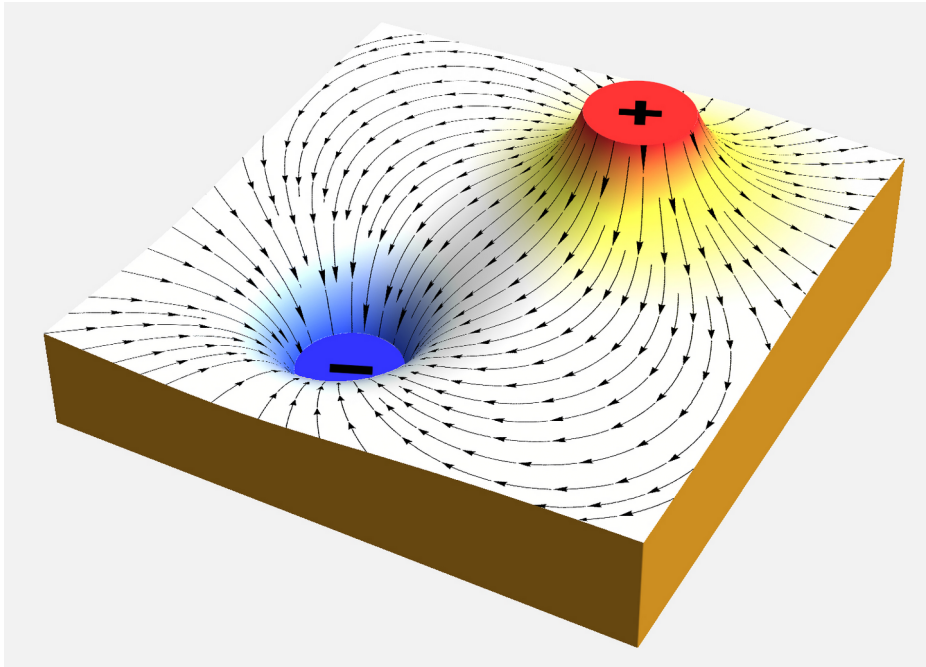


$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

$\mathbf{x}$ = Positionsvektor
= (u, v, w)
 t = Zeit

Bild: By WalkingRadiance - Own work, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=121715462>

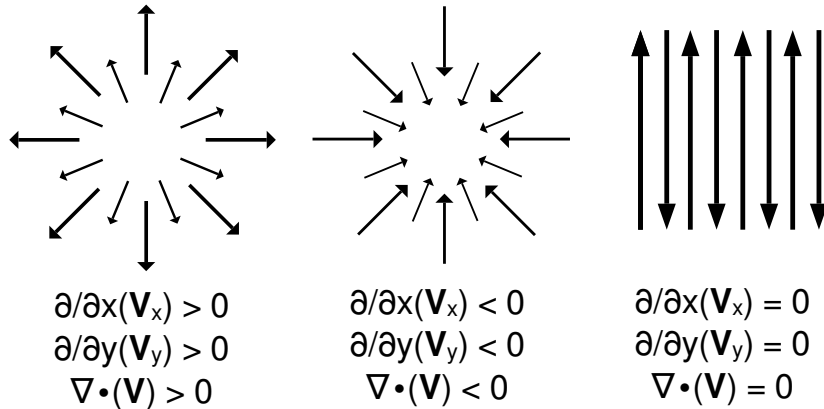
Vektorfeld



- Quellen und Senken möglich
- Wasser weder erzeugbar noch zerstörbar

Bild: By MikeRun - Own work, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=87797379>

Divergenz



$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

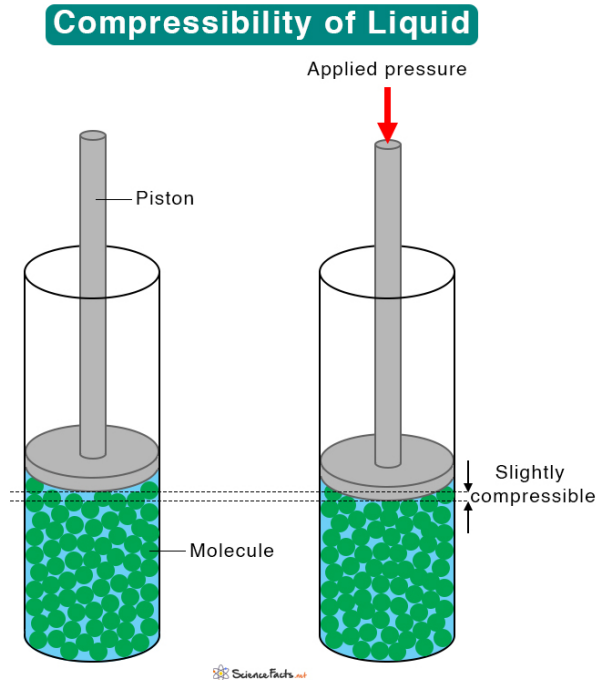
$$\nabla \cdot \mathbf{u} < 0 \rightarrow \text{Senke}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} > 0 \rightarrow \text{Quelle}$$

$$\forall x: \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \rightarrow \text{Quellfrei}$$

Bild: By User:Bfoshizzle1 - Own work based on: ChampSelonSigneDeDiv.pdf by Biolynk (modified: redone from scratch as .svg using Inkscape, changed right-pointing horizontal vectors into up-and-down vectors for 3rd example, modified or omitted captions) This W3C-unspecified vector image was created with Inkscape ., CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=76803637>

Inkompressibilität



- Flüssigkeiten sind *kaum* komprimierbar

⇒ Annahme:
Fluide
inkomprimierbar

Bild: <https://www.sciencefacts.net/wp-content/uploads/2021/11/Are-Liquids-Compressible.jpg>

1. Navier-Stokes Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$0 + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

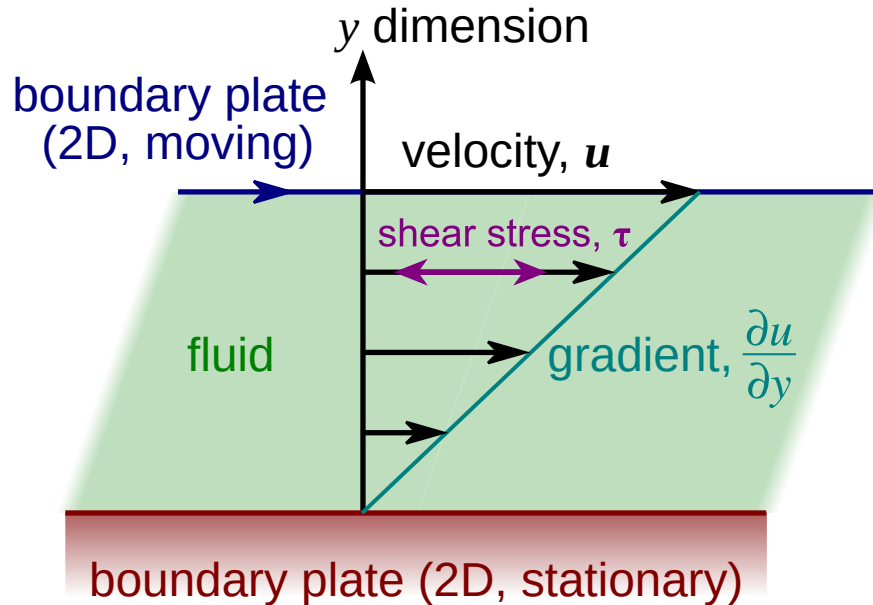
Die **Divergenzfreiheit**
des Geschwindigkeits-
feldes entspricht der
Massenerhaltung.

Was ist eine Fluid?

Fluide sind Substanzen, die sich unter Einfluss von **Scherkräften** *kontinuierlich* **verformen** (fließen)¹

¹(Uddin, 2022, S. 1)

Schubspannung



- Obere Platte bewegt sich mit u
- Geschwindigkeit an unterer fester Platte 0 (**Haftbedingung**)
- $\Rightarrow$
Geschwindigkeitsgradient & **Schubspannung τ**

Bild: By Duk at the English-language Wikipedia, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4168566>

Newtonsches Reibungsgesetz

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

τ : Schubspannung

μ : Dynamische Viskosität

Viskosität μ =
Reibungskonstante
zwischen Fluidschichten

Pechtropfenexperiment



- Pech hat extrem hohe Viskosität
- Trotzdem **immer in Bewegung**

Bild: By University_of_Queensland_Pitch_drop_experiment.jpg: John Mainstonederivative work: Amada44 - This file was derived from: University of Queensland Pitch drop experiment.jpg:, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=22579661>

Pechtropfenexperiment

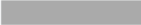
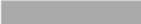
Date	Event	Duration		
		Years	Months	Bar chart
1927	Hot pitch poured			
October 1930	Stem cut			
December 1938	1st drop fell	8.1	98	
February 1947	2nd drop fell	8.2	99	
April 1954	3rd drop fell	7.2	86	
May 1962	4th drop fell	8.1	97	
August 1970	5th drop fell	8.3	99	
April 1979	6th drop fell	8.7	104	
July 1988	7th drop fell	9.2	111	
November 2000	8th drop fell ^[A]	12.3	148	
April 2014	9th drop fell ^[B]	13.4	161	
ongoing	10th drop falling	12.1	145	

Bild: https://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_drop_experiment

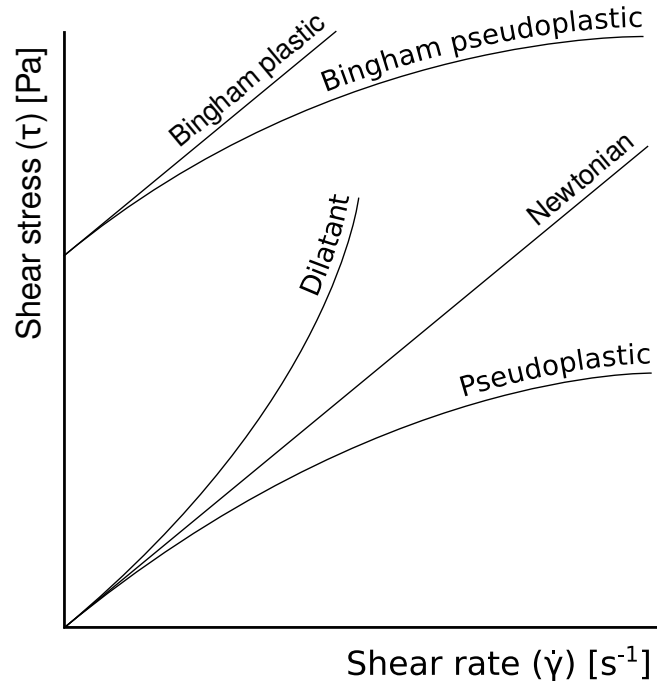
Nichtnewtonsche Fluide



- Ist Viskosität immer **konstant**?

Bild: By Andrew Dunn (Website: <http://www.andrewdunnphoto.com/>) - Own work, CC BY-SA 2.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=339469>

Nichtnewtonsche Fluide



- Viskosität **abhängig** von Schergeschwindigkeit
- **Annahme**: Nur Newtonsche Fluide
 $\Rightarrow$ Konstante Viskosität

Bild: By g-sec - Own work, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=25142709>

Beispiel



Bild: By Museum Rotterdam -
<https://museumrotterdam.nl/collectie/item/67937>, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=87705415>



Bild: By Sharky78 - Own work, CC BY 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5834254>

2. Navier-Stokes Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

Hier die **Eulersche Form**

2. Navier-Stokes Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

Dichte = Masse
pro Volumen

2. Navier-Stokes Gleichung

Ein Fluidteilchen
beschleunigt durch:

1) Lokale
Geschwindigkeits-
änderung an einem
festem Punkt im Raum

2) Mitführen der
Geschwindigkeit mit der
Strömung selbst
(Advektion)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

2. Navier-Stokes Gleichung

Ein Fluidteilchen
beschleunigt durch:

1) Lokale
Geschwindigkeits-
änderung an einem
festem Punkt im Raum

2) Mitführen der
Geschwindigkeit mit der
Strömung selbst
(Advektion)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

2. Navier-Stokes Gleichung

Drukgradient

Strömung von
hohem zu
niedriegem Druck

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

2. Navier-Stokes Gleichung

Viskosität

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

∇^2 : Unterschied
zum Durchschnitt
der Nachbarn

Impuls Diffusion



Bild: By Water fountain, Clones by Kenneth Allen, CC BY-SA 2.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/>>, via Wikimedia Commons



Bild: By Alexander Klink, CC BY 3.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>>, via Wikimedia Commons

2. Navier-Stokes Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

Externe Kräfte
z.B. Gravitation

Simulation

- **Start**: Divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}^n$
- **Ziel**: Divergenzfreies $\mathbf{u}^{n+1}$ zur Zeit $t+\Delta t$

Simulation

1. $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}^n + \Delta t \cdot \mathbf{F}$ // Externe Kräfte
2. $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{w}_1 \cdot \nabla) \mathbf{w}_1$ // Advektion
3. $\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_2 + \Delta t \cdot (\mu/\rho) \nabla^2 \mathbf{w}_2$ // Viskosität
4. $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{w}_3 - (\Delta t/\rho) \cdot \nabla p$ // Druckkorrektur

Drukkorrektur

- 1) **Lokale** Divergenzfehler $\forall x: \nabla \cdot \mathbf{w}_3 = 0 \rightarrow \text{Quellfrei}$
- 2) Inkompressibilität erfordert Druckausgleich
- 3) Druck wirkt instantan global
- 4) $\Rightarrow$ **globales Problem**

Anwendung CFD

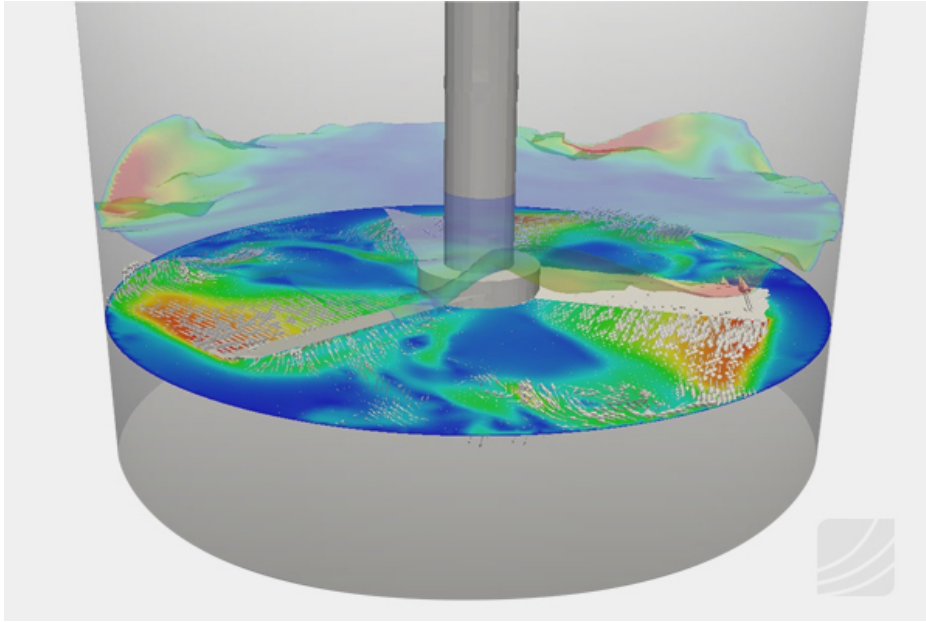


Bild: By SimScale GmbH - These post-processing images were performed with the SimScale cloud-based CAE platform., CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=54304391>

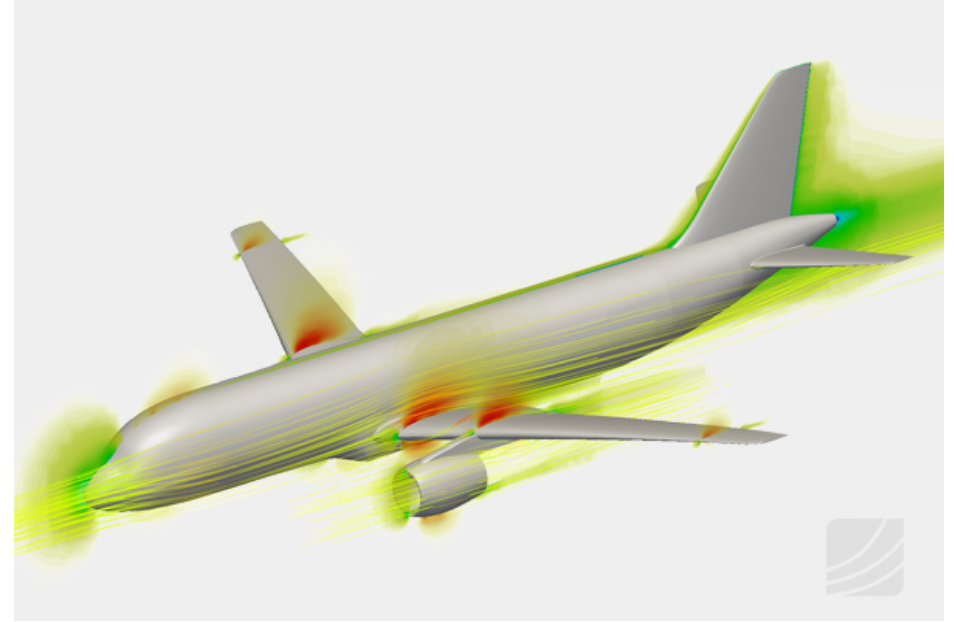


Bild: By SimScale GmbH - These post-processing images were performed with the SimScale cloud-based CAE platform., CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=54304387>

Flüssigkeitssimulation (in Echtzeit)

Euler vs. Lagrange

- **Bisher:** Eulersche Sicht:
"Gitter-basiert"
Wie verhält sich **das Fluid an einem festen Punkt?**
- **Jetzt:** Lagrange'sche Sicht:
"Partikel-basiert"
Wie verhält sich **ein Fluidteilchen über Zeit & Raum?**

Smoothed Particle Hydrodynamics

Idee:

- Fluid als Sammlung von Partikeln
 - Partikel bewegen sich mit ihrem Impuls
→ Advektion
 - Interne Kräfte basierend auf
benachbarten Partikeln
- ⇒ Kein Gitter! Lösung über **Glättungskerne**

Smoothed Particle Hydrodynamics

“According to SPH, a **scalar quantity A** is *interpolated* at **location $\mathbf{r}$** by a **weighted sum** of contributions from all particles:”

$$A_s(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h)$$

(Müller et al, 2003, S. 2)

Volumen

Jedes Partikel i repräsentiert ein gewisses Volumen:

$$V_i = \frac{m_i}{\rho_i}$$

$$A_S(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h)$$

(Müller et al, 2003, S. 2)

Dichte

$$\rho_S(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) = \sum_j m_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h)$$

(Müller et al, 2003, S. 2)

Faltung

Source layer

5	2	6	8	2	0	1	2
4	3	4	5	1	9	6	3
3	9	2	4	7	7	6	9
1	3	4	6	8	2	2	1
8	4	6	2	3	1	8	8
5	8	9	0	1	0	2	3
9	2	6	6	3	6	2	1
9	8	8	2	6	3	4	5

Convolutional
kernel

-1	0	1
2	1	2
1	-2	0

Destination layer

	5						

$$\begin{aligned} &(-1 \times 5) + (0 \times 2) + (1 \times 6) + \\ &(2 \times 4) + (1 \times 3) + (2 \times 4) + \\ &(1 \times 3) + (-2 \times 9) + (0 \times 2) = 5 \end{aligned}$$

Bild: <https://medium.com/@abhishekjainindore24/all-about-convolutions-kernels-features-in-cnn-c656616390a1>

Faltung

<i>Original</i>	<i>Gaussian Blur</i>	<i>Sharpen</i>	<i>Edge Detection</i>
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
			

Bild: <https://medium.com/@abhishekjainindore24/all-about-convolutions-kernels-features-in-cnn-c656616390a1>

Glättungskern

Kern normalisiert wenn:

$$\int W(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$$

Symmetrie: $W(\mathbf{r}, h) = W(-\mathbf{r}, h)$

h : (endlicher) Kernradius

(Müller et al, 2003, S. 2)

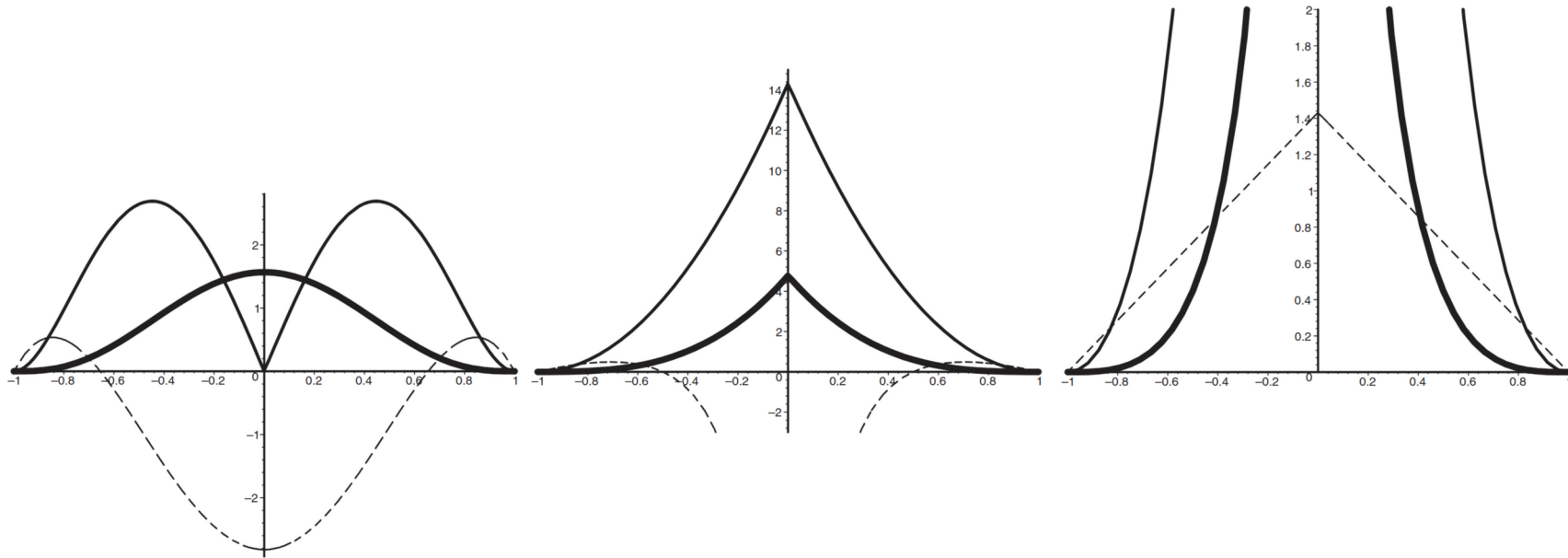
Kern Ableitungen

$$\nabla A_S(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h)$$

$$\nabla^2 A_S(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla^2 W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h)$$

(Müller et al, 2003, S. 2)

Glättungskerne



(Müller et al, 2003, S. 4)

Materielle Ableitung

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$

Partikel bewegen sich *mit* dem Fluid

(Müller et al, 2003, S. 3)

Beschleunigung

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \frac{\mathbf{f}_i}{\rho_i}$$

(Müller et al, 2003, S. 3)

Druck

$$\mathbf{f}_i^{Druck} = -\nabla p(\mathbf{r}_i) = -\sum_j m_j \frac{p_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$$

(Müller et al, 2003, S. 3)

Druck

- Für 2 Partikel i, j :
 - Gradient des Kerns ist 0 in der Mitte
 - Partikel i berechnet Druck nur durch Partikel j
 - Vice versa
 - Wenn $p_i \neq p_j$:
 $\Rightarrow \mathbf{f}_i \neq \mathbf{f}_j$ (!Newton's 3. Gesetz)

(Müller et al, 2003, S. 3)

Druck

$$\mathbf{f}_i^{Druck} = - \sum_j m_j \frac{p_j + p_i}{2 \rho_j} \nabla W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$$

Symmetrie per Arithmetisches Mittel

(Müller et al, 2003, S. 3)

Viskosität

$$\mathbf{f}_i^{\text{Viskosität}} = \mu \sum_j m_j \frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i}{\rho_j} \nabla^2 W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$$

Symmetrie per
Geschwindigkeitsdifferenz

(Müller et al, 2003, S. 3)

Oberflächenspannung

- Tendenz von Flüssigkeiten ihre **Oberfläche zu minimieren**
- Innen:
Kohäsionskräfte wirken gleichmäßig
- Außen:
Keine Teilchen oberhalb
⇒ Kohäsionskräfte nach innen

Oberflächenspannung



Bild: By User:Dschwen - Own work, CC BY-SA 2.5,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=561617>



Bild: By Rolf Dietrich Brecher from Germany - Synthese
von Form und Inhalt, CC BY 2.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=81717368>

Anwendung

Müller et al / Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications

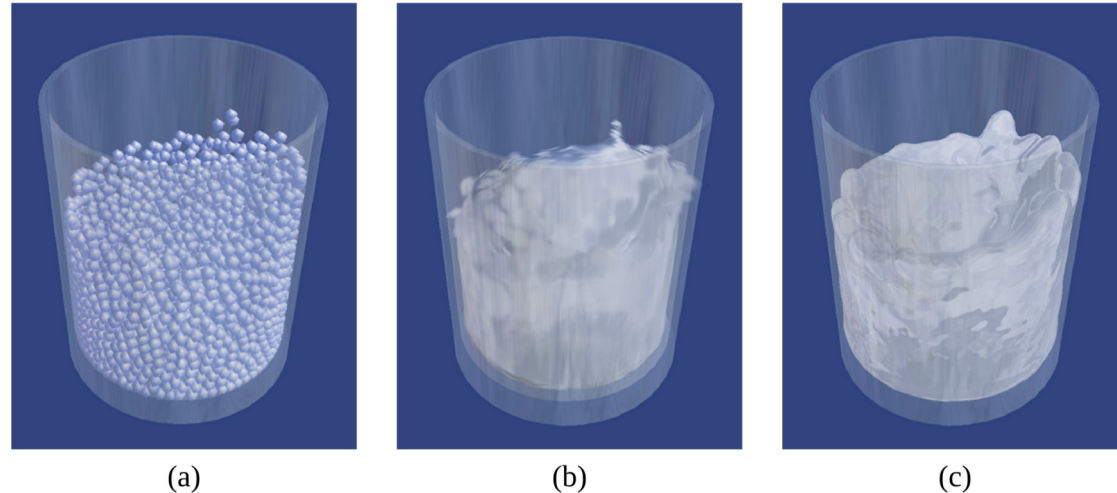


Figure 3: A swirl in a glass induced by a rotational force field. Image (a) shows the particles, (b) the surface using point splatting and (c) the iso-surface triangulated via marching cubes.

(Müller et al, 2003, S. 7)

Anwendung



Figure 5: *Pouring water into a glass at 5 frames per second.*

(Müller et al, 2003, S. 7)

2003



AMD Athlon 64 FX-51

- 1 core @ 2.2GHz
- + 1GB DDR RAM



NVIDIA GeForce FX 5950 Ultra

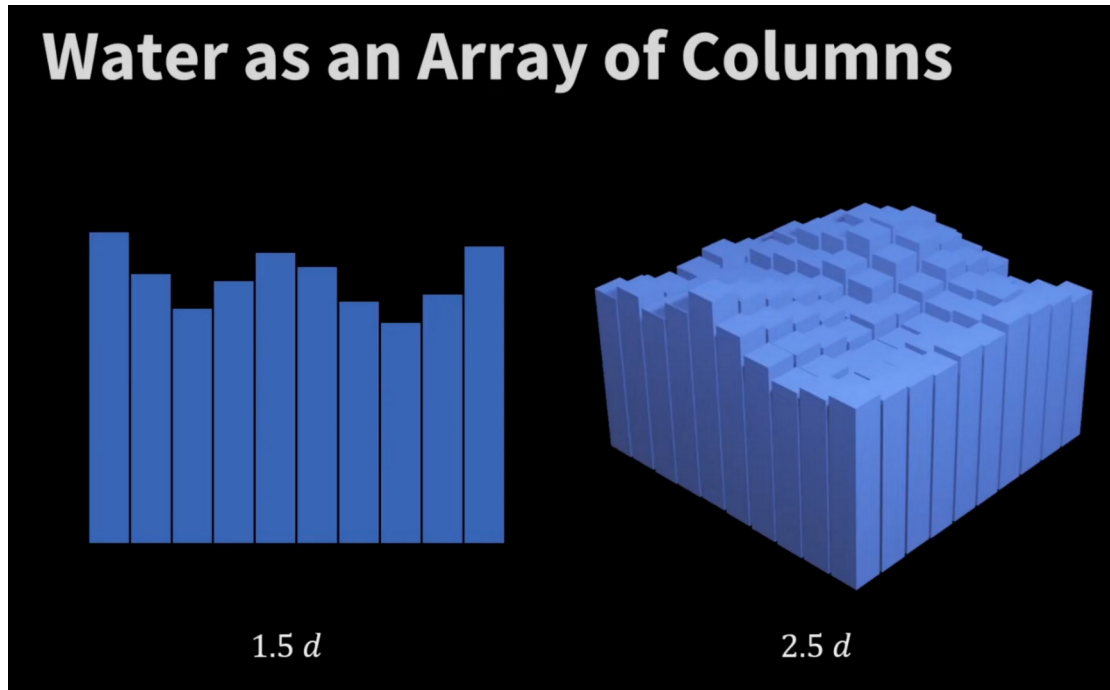
- 4 Pixel Shader
- 256MB VRAM

CPU: <https://www.techpowerup.com/cpu-specs/athlon-64-fx-51.c35>

GPU: <https://www.techpowerup.com/gpu-specs/geforce-fx-5950-ultra.c79>

Oceansimulation

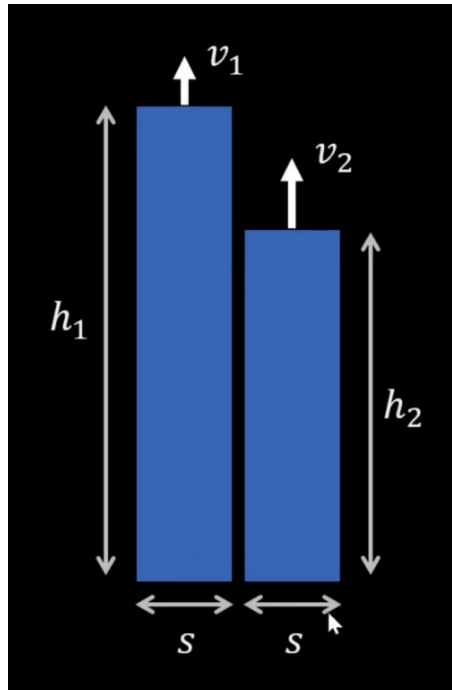
Höhenfeld



- Idee:
Wasser als 2D
Ebene mit Höhe

Bild: (Müller, 2023, 1:07)

Gitter Struktur



- Jede Säule hat **Höhe h** und **Geschwindigkeit v**
- Jede Säule ist **gleich weit**

Bild: (Müller, 2023, 2:13)

Algorithmus

- For all cells i, j in the domain:

$$a_{i,j} \leftarrow \frac{c^2}{s^2} (h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j})$$

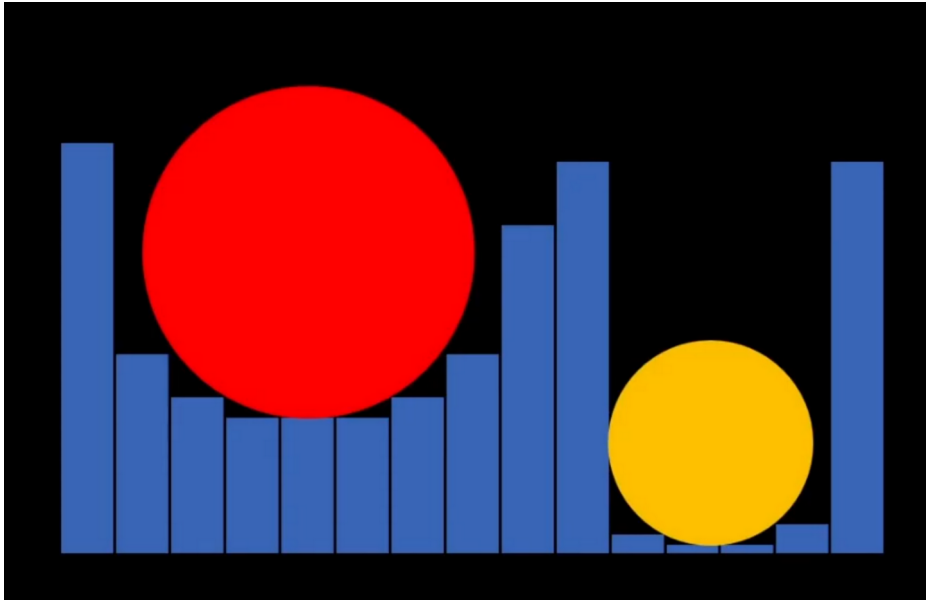
$$v_{i,j} \leftarrow v_{i,j} + \Delta t a_{i,j}$$

- For all cells i, j in the domain:

$$h_{i,j} \leftarrow h_{i,j} + \Delta t v_{i,j}$$

Bild: (Müller, 2023, 6:17)

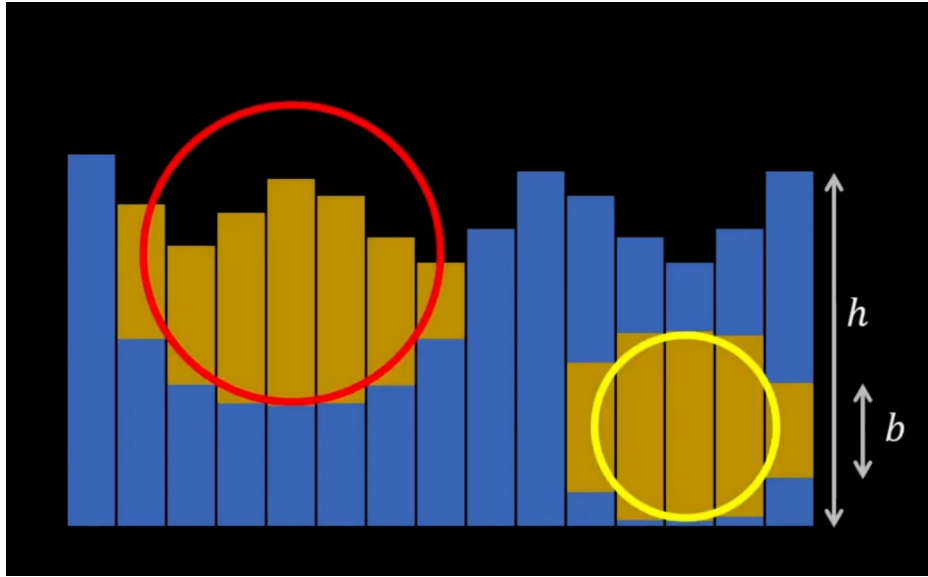
Objekt Interaktion



- Volumen Verlust
- Keine Immersion

Bild: (Müller, 2023, 6:53)

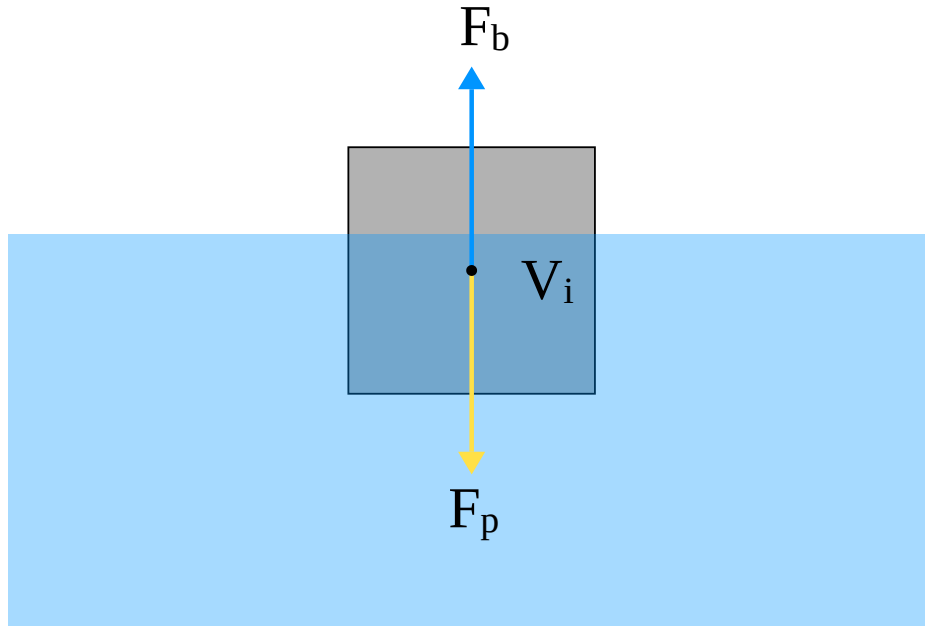
Objekt Interaktion



- Verdrängte Wassermenge in **eigenes Höhenfeld b**
- Später:
$$h_{i,j} += \Delta b_{i,j}$$

Bild: (Müller, 2023, 7:13)

Auftrieb



Archimedisches Prinzip:

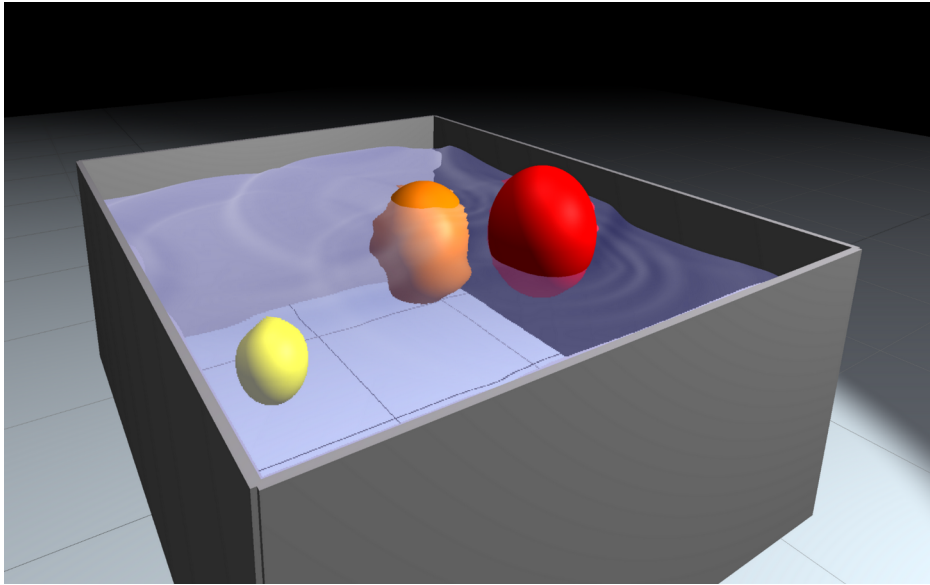
“Der statische Auftrieb eines Körpers ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit”

Bild: By Jooja - This file was derived from: Principio di Archimede galleggiamento.png:, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=97765829>

Limitierungen

- Vertikale Geschwindigkeit begrenzt
 - Keine überschlagenden Wellen
 - Keine Wassertropfen/spritzer
- ⇒ Aber **performant**!

Demo



<https://matthias-research.github.io/pages/tenMinutePhysics/20-heightFieldWater.html>

Anwendung



Bild: <https://www.gamereactor.eu/beautiful-4k-screenshots-from-sea-of-thieves/>

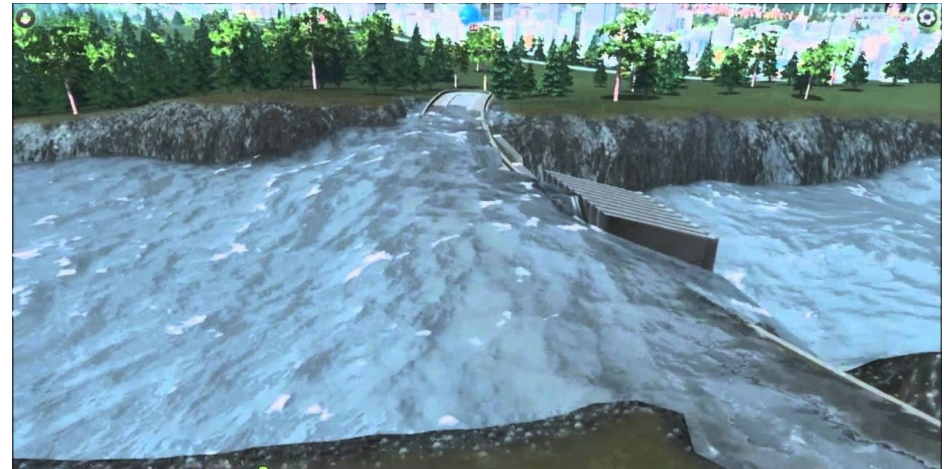


Bild: <https://gamerant.com/common-mistakes-avoid-cities-skylines/>

Shading

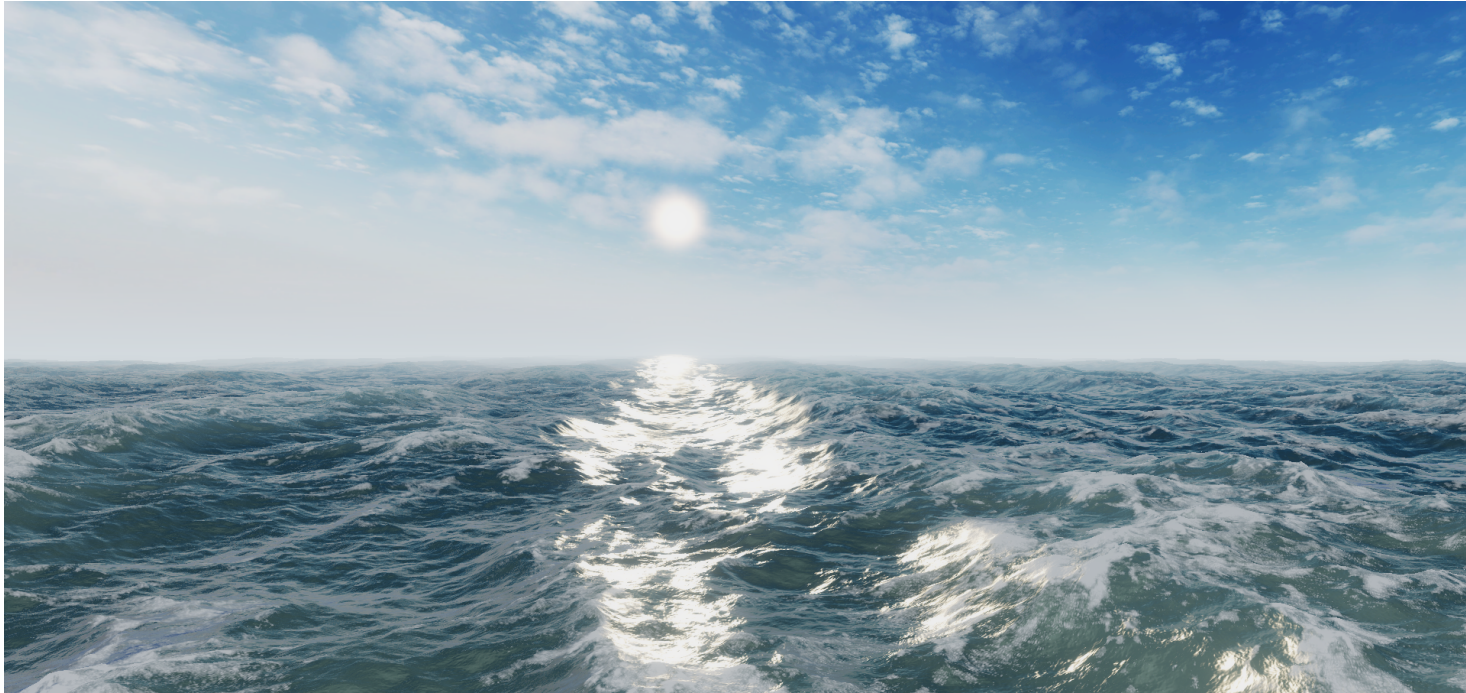
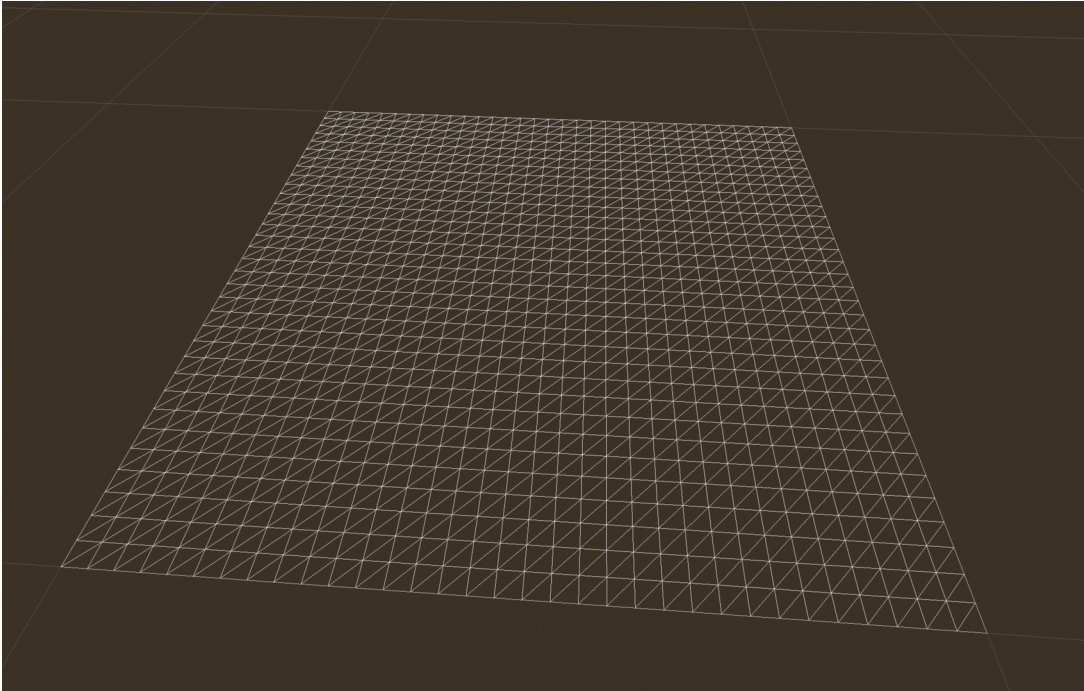


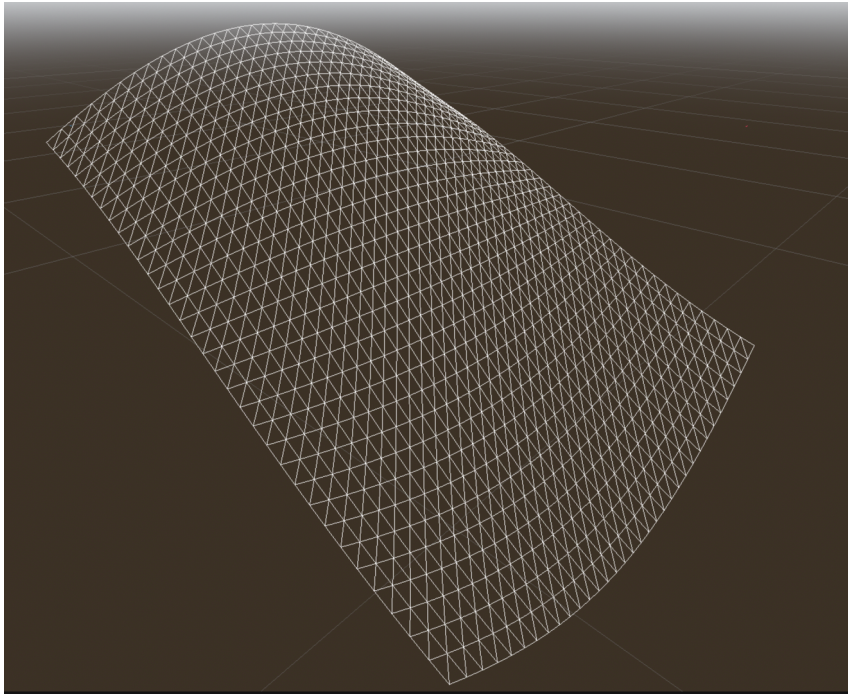
Bild: <https://github.com/GarrettGunnell/Water>

Wasseroberfläche



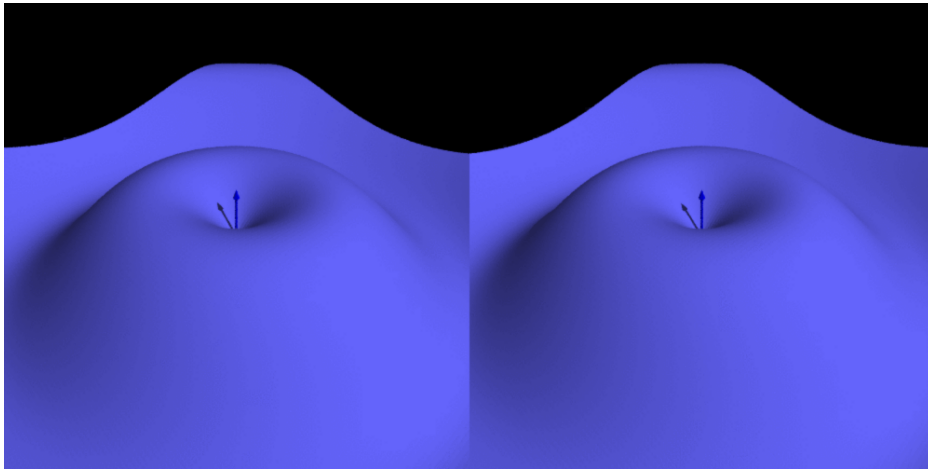
- 2D Ebenen Mesh

Vertex Shader



```
2  
3 ▼ void vertex() {  
4   > VERTEX.y += cos(VERTEX.x) * sin(VERTEX.z);  
5 }  
6
```

Sinus Welle



- Sinus als Welle

Bild: By Ant.ton.t, CC BY-SA 3.0
<<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>>, via Wikimedia Commons

Sum of Sines

$$W(x, y, t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i * \sin(\vec{d}_i \cdot (x, y) * \omega_i + t * \phi_i)$$

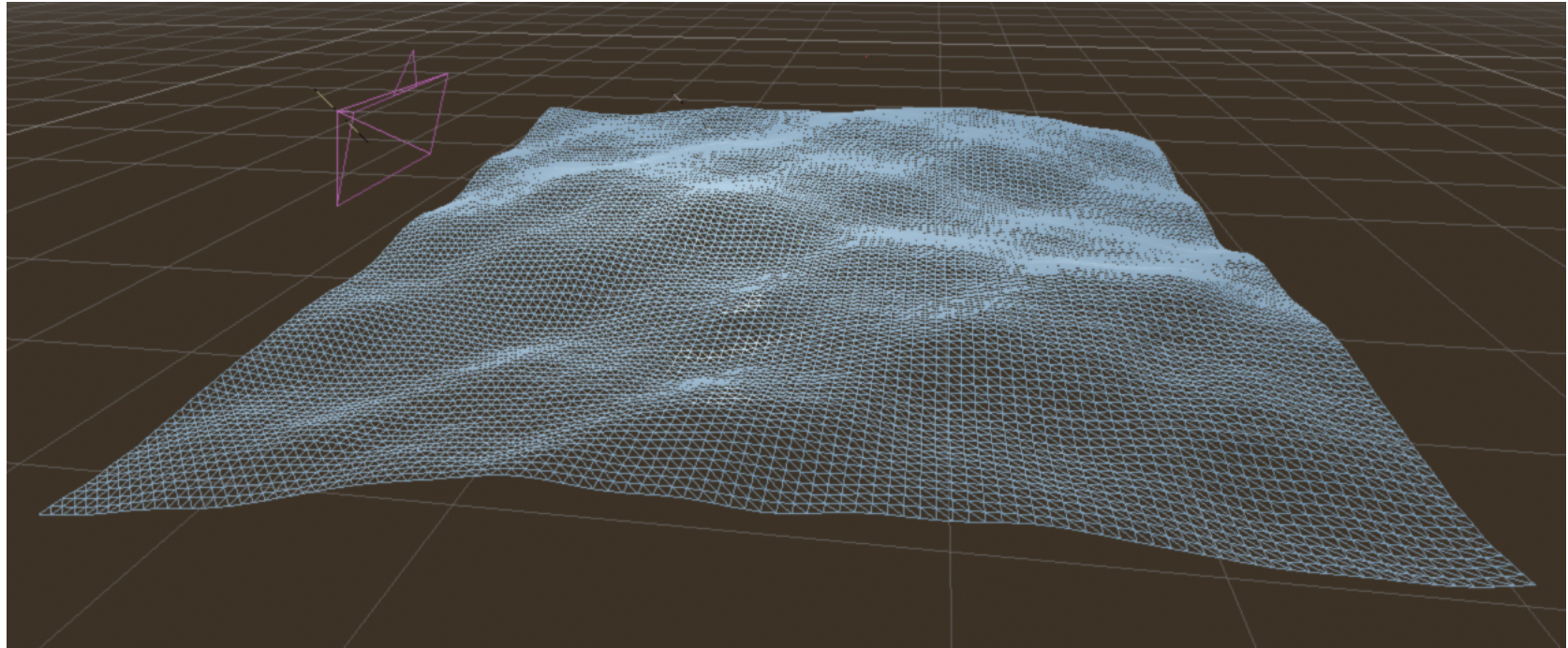
α_i : Amplitude

$\vec{d}_i$: Richtung

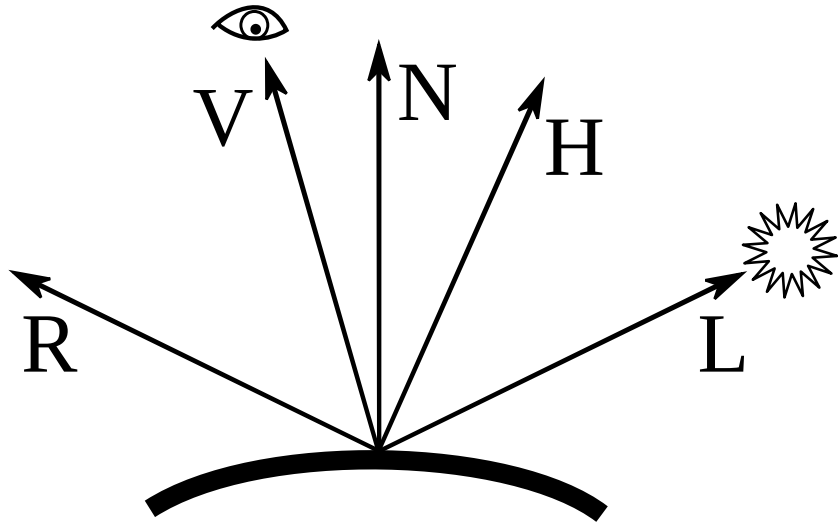
ω_i : Frequenz

ϕ_i : Geschwindigkeit

Sum of Sines



Blinn-Phong Shading

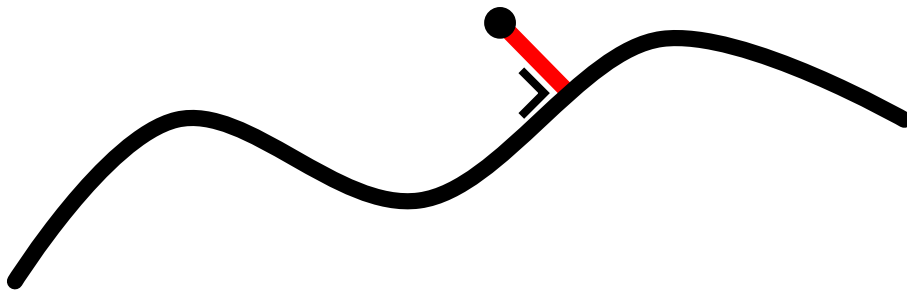


Reflexion R durch:

- Blickrichtung V
- Lichtrichtung L
- Normalenvektor N

Bild: By Martin Kraus - Own work, CC0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15534756>

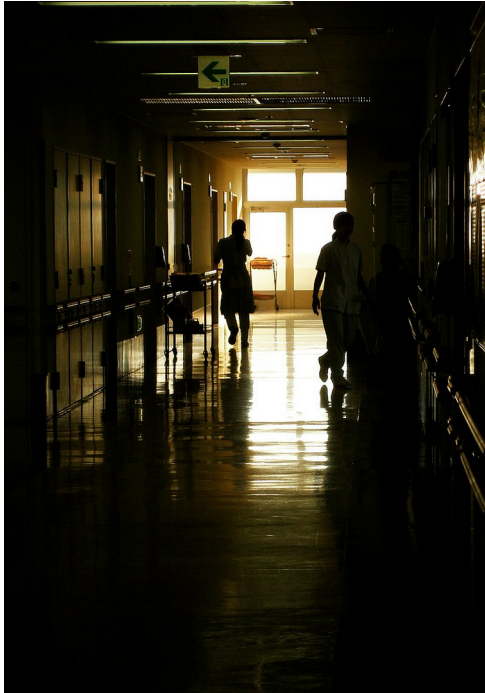
Normalenvektor



- Exakt:
Ableitung der
Wellenfunktion
- Approximiert:
Nahe Nachbarn

Bild: By Silver Spoon - Own work, Public Domain,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10615026>

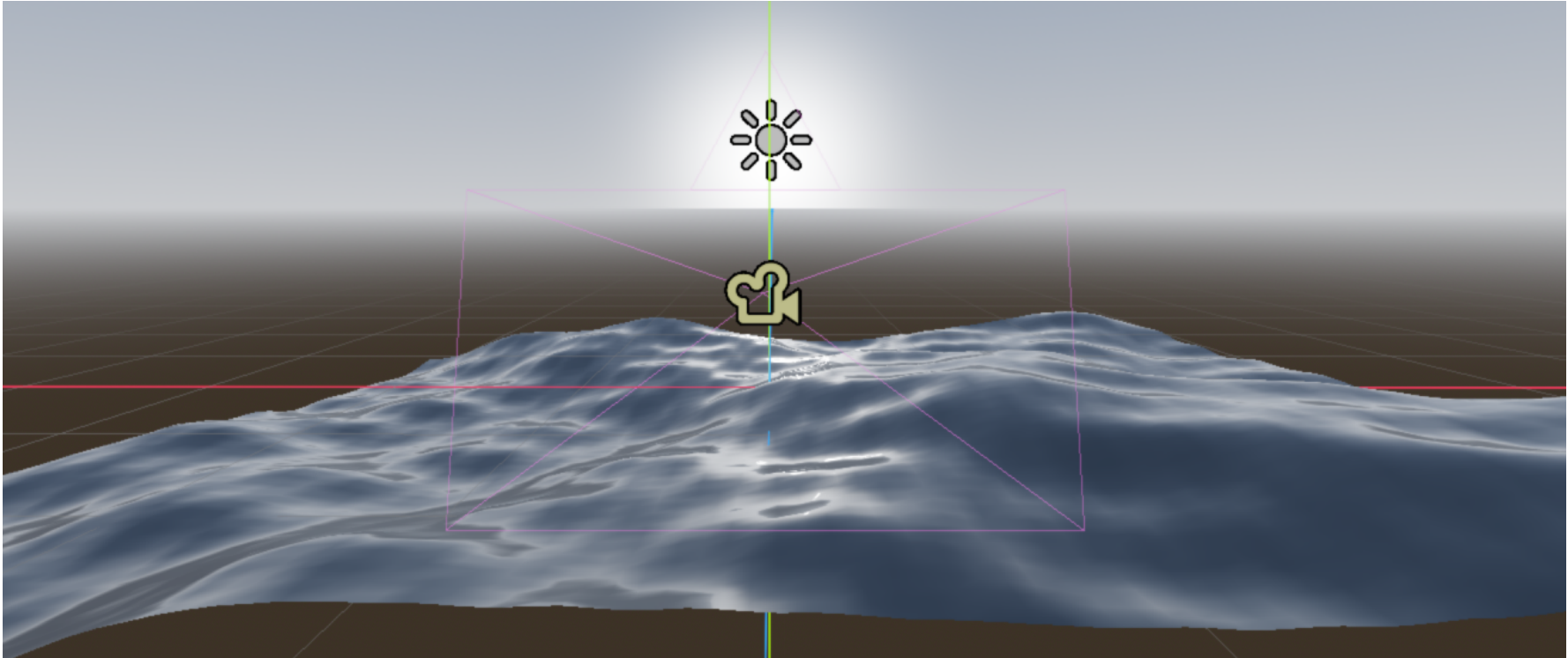
Fresnel-Effekt



Je **flacher**
Blickwinkel zur
Oberfläche, desto
stärker die
Reflexion

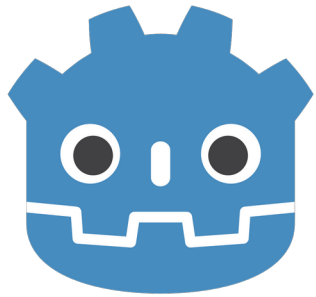
Bild: By tanakawho from Tokyo, Japan - Hospital corridor 2, CC BY 2.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2138545>

Demo



Godot

Anwendung (Godot)



GODOT
Game engine

Keine “built-in”
Flüssigkeitssimulation¹

Bild: <https://godotengine.org/press/>

¹Jolt Physics kann Auftrieb simulieren (nicht in Godot implementiert)

Godot Community

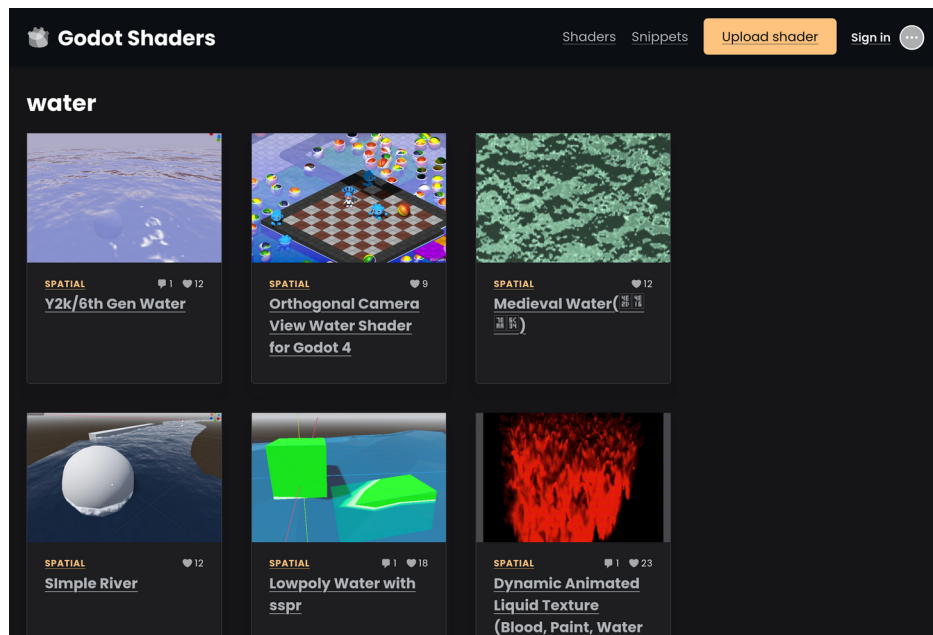


Bild: <https://godotshaders.com/shader-tag/water/>

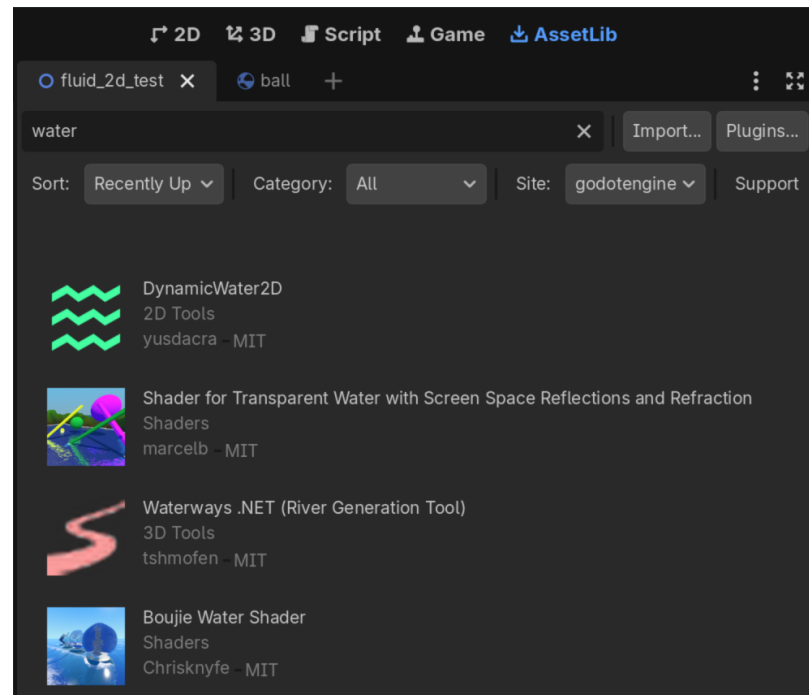
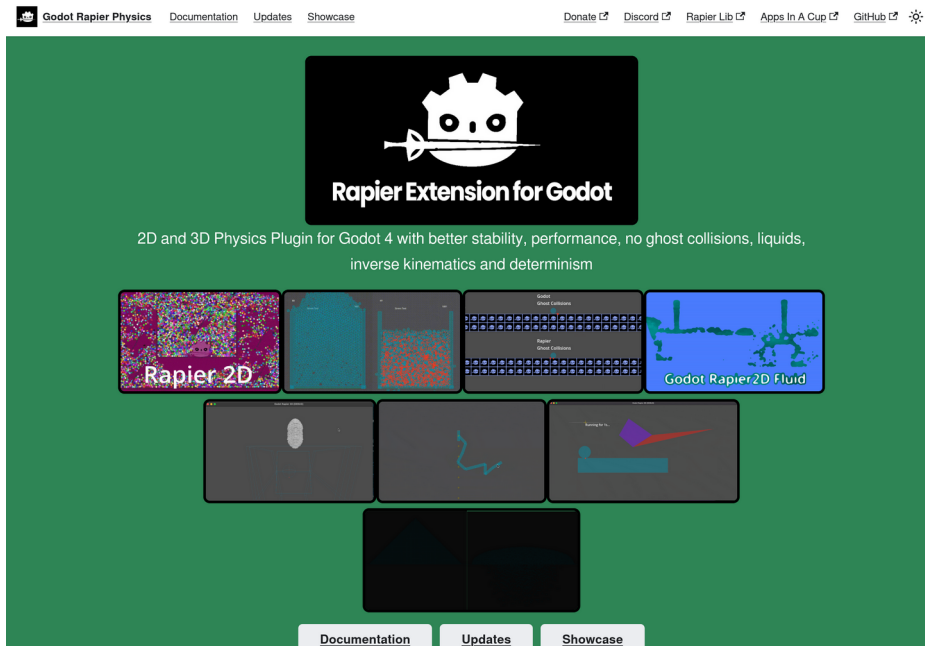


Bild: Godot 4.6 Asset Library

Physics Plugin



- Rapier Physics Engine¹
- Salva Fluid Simulation²

Bild: <https://godot.rapier.rs/>

¹<https://rapier.rs/>

²<https://github.com/dimforge/salva>

Fragen?

Literaturverzeichnis

- Uddin, N. (2022). *Fluid Mechanics*. (1. Aufl.)
<https://doi.org/10.1201/9781003315117>
- Müller, Matthias & Charypar, David & Gross, Markus. (2003). *Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications*. Fluid Dynamics. 2003. 154-159.
- Müller. M. (2023). *How to write a Height-Field Water Simulator with 100 lines of code*. Video. <https://www.youtube.com/watch?v=hswBi5wcqAA>
- Gunnell. G. (2023). *Water Rendering*. Demo.
<https://github.com/GarrettGunnell/Water>