



64-040 Modul InfB-RSB

Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

[https://tams.informatik.uni-hamburg.de/
lectures/2021ws/vorlesung/rsb](https://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2021ws/vorlesung/rsb)

– Kapitel 6 –

Andreas Mäder



Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik

Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2021/2022



Logische Operationen

Boole'sche Algebra

Boole'sche Operationen

Bitweise logische Operationen

Schiebeoperationen

Anwendungsbeispiele

Literatur



Nutzen einer (abstrakten) Algebra?!

Analyse und Beschreibung von

- ▶ gemeinsamen, wichtigen Eigenschaften
- ▶ mathematischer Operationen
- ▶ mit vielfältigen Anwendungen

Spezifiziert durch

- ▶ die Art der Elemente (z.B. ganze Zahlen, Aussagen usw.)
- ▶ die Verknüpfungen (z.B. Addition, Multiplikation)
- ▶ zentrale Elemente (z.B. Null-, Eins-, inverse Elemente)

Anwendungen: Computerarithmetik → Datenverarbeitung
Fehlererkennung/-korrektur → Datenübertragung
Codierung → Repräsentation
...

- ▶ George Boole, 1850: Untersuchung von logischen Aussagen mit den Werten *true* (wahr) und *false* (falsch)
- ▶ Definition einer Algebra mit diesen Werten
- ▶ drei grundlegende Funktionen:
 - ▶ NEGATION (NOT) Schreibweisen: $\neg a, \bar{a}, \sim a$
 - ▶ UND $-''-$ $a \wedge b, a \& b$
 - ▶ ODER $-''-$ $a \vee b, a | b$
 - ▶ XOR $-''-$ $a \oplus b, a \hat{ } b$
- ▶ Claude Shannon, 1937: Realisierung der Boole'schen Algebra mit Schaltfunktionen (binäre digitale Logik)

- ▶ zwei Werte: *wahr* (*true*, 1) und *falsch* (*false*, 0)
- ▶ drei grundlegende Verknüpfungen:

NOT(x)

x	
0	1
1	0

AND(x, y)

x	y	0	1
0	0	0	0
1	0	0	1

OR(x, y)

x	y	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1

XOR(x, y)

x	y	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

- ▶ alle logischen Operationen lassen sich mit diesen Funktionen darstellen
- ⇒ *vollständige Basismenge*

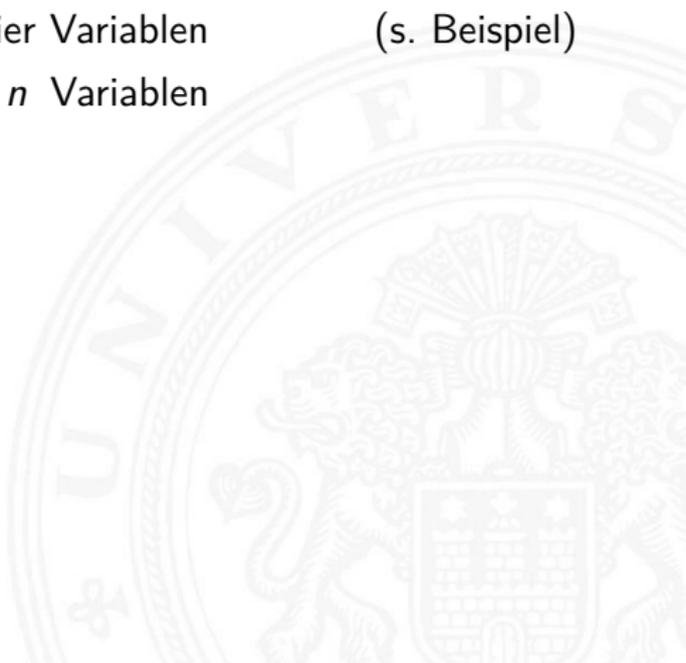


Anzahl der binären Funktionen

- ▶ insgesamt 4 Funktionen mit einer Variable

$$f_0(x) = 0, f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = \neg x$$

- ▶ insgesamt 16 Funktionen zweier Variablen (s. Beispiel)
- ▶ allgemein 2^{2^n} Funktionen von n Variablen
- ▶ später noch viele Beispiele



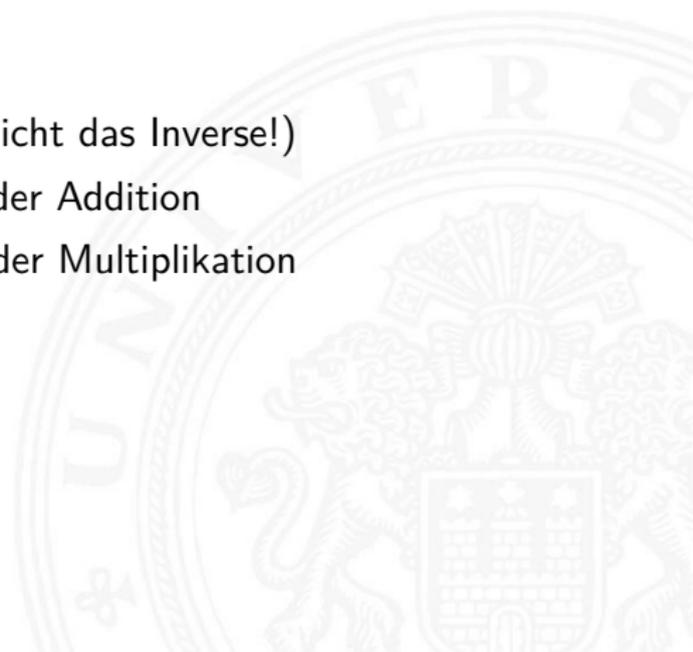
Anzahl der binären Funktionen (cont.)

x =	0	1	0	1	Bezeichnung	Notation	alternativ	Java / C
y =	0	0	1	1				
	0	0	0	0	Nullfunktion	0		0
	0	0	0	1	AND	$x \cap y$	$x \wedge y$	<code>x&&y</code>
	0	0	1	0	Inhibition	$x < y$		<code>x<y</code>
	0	0	1	1	Identität y	y		y
	0	1	0	0	Inhibition	$x > y$		<code>x>y</code>
	0	1	0	1	Identität x	x		x
	0	1	1	0	XOR	$x \oplus y$	$x \neq y$	<code>x!=y</code>
	0	1	1	1	OR	$x \cup y$	$x \vee y$	<code>x y</code>
	1	0	0	0	NOR	$\neg(x \cup y)$	$\overline{x \vee y}$	<code>!(x y)</code>
	1	0	0	1	Äquivalenz	$\neg(x \oplus y)$	$x = y$	<code>x==y</code>
	1	0	1	0	NICHT x	$\neg x$	\bar{x}	<code>!x</code>
	1	0	1	1	Implikation	$x \leq y$	$x \rightarrow y$	<code>x<=y</code>
	1	1	0	0	NICHT y	$\neg y$	\bar{y}	<code>!y</code>
	1	1	0	1	Implikation	$x \geq y$	$x \leftarrow y$	<code>x>=y</code>
	1	1	1	0	NAND	$\neg(x \cap y)$	$\overline{x \wedge y}$	<code>!(x&&y)</code>
	1	1	1	1	Einsfunktion	1		1



Boole'sche Algebra - formale Definition

- ▶ 6-Tupel $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ bildet eine Algebra
- ▶ $\{0, 1\}$ Menge mit zwei Elementen
- ▶ \vee ist die „Addition“
- ▶ \wedge ist die „Multiplikation“
- ▶ \neg ist das „Komplement“ (nicht das Inverse!)
- ▶ 0 (false) ist das Nullelement der Addition
- ▶ 1 (true) ist das Einselement der Multiplikation



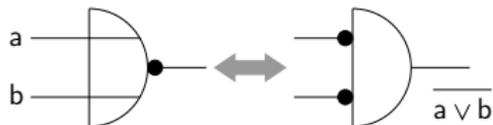
Rechenregeln: Ring / Algebra

6.1 Logische Operationen - Boole'sche Algebra

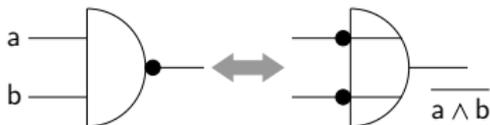
64-040 Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

Eigenschaft	Ring der ganzen Zahlen	Boole'sche Algebra
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	$a \vee b = b \vee a$ $a \wedge b = b \wedge a$
Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Identitäten	$a + 0 = a$ $a \cdot 1 = a$	$a \vee 0 = a$ $a \wedge 1 = a$
Vernichtung	$a \cdot 0 = 0$	$a \wedge 0 = 0$
Auslöschung	$-(-a) = a$	$\neg(\neg a) = a$
Inverses	$a + (-a) = 0$	—
Distributivgesetz	—	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Komplement	—	$a \vee \neg a = 1$ $a \wedge \neg a = 0$
Idempotenz	—	$a \vee a = a$ $a \wedge a = a$
Absorption	—	$a \vee (a \wedge b) = a$ $a \wedge (a \vee b) = a$
De Morgan Regeln	—	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$



$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$



1. Ersetzen von *UND* durch *ODER* und umgekehrt
⇒ Austausch der Funktion
2. Invertieren aller Ein- und Ausgänge

Verwendung

- ▶ bei der Minimierung logischer Ausdrücke
- ▶ beim Entwurf von Schaltungen
- ▶ siehe Kapitel 8 *Schaltfunktionen* und 9 *Schaltnetze*

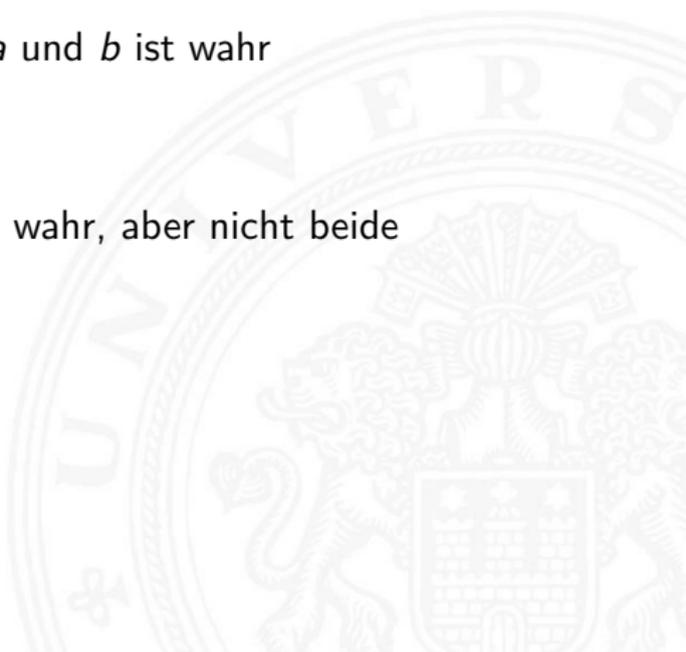


XOR: Exklusiv-Oder / Antivalenz

⇒ entweder a oder b (ausschließlich)
 a ungleich b

(⇒ Antivalenz)

- ▶ $a \oplus b = (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$
genau einer von den Termen a und b ist wahr
- ▶ $a \oplus b = (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$
entweder a ist wahr oder b ist wahr, aber nicht beide gleichzeitig
- ▶ $a \oplus a = 0$



- ▶ Datentyp für Boole'sche Logik
 - ▶ Java: Datentyp `boolean`
 - ▶ C: implizit für alle Integertypen
- ▶ Vergleichsoperationen
- ▶ Logische Grundoperationen
- ▶ Bitweise logische Operationen
= parallele Berechnung auf Integer-Datentypen
- ▶ Auswertungsreihenfolge
 - ▶ Operatorprioritäten
 - ▶ Auswertung von links nach rechts
 - ▶ (optionale) Klammerung



- ▶ $a == b$ wahr, wenn a gleich b
 - $a != b$ wahr, wenn a ungleich b
 - $a >= b$ wahr, wenn a größer oder gleich b
 - $a > b$ wahr, wenn a größer b
 - $a < b$ wahr, wenn a kleiner b
 - $a <= b$ wahr, wenn a kleiner oder gleich b
-
- ▶ Vergleich zweier Zahlen, Ergebnis ist logischer Wert
 - ▶ Java: Integerwerte alle im Zweierkomplement
 - C: Auswertung berücksichtigt signed/unsigned-Typen

- ▶ zusätzlich zu den Vergleichsoperatoren $<$, $<=$, $==$, $!=$, $>$, $>=$
- ▶ drei **logische** Operatoren:
 - ! logische Negation
 - && logisches UND
 - || logisches ODER
- ▶ Interpretation der Integerwerte:
 - der Zahlenwert $0 \Leftrightarrow$ logische 0 (false)
 - alle anderen Werte \Leftrightarrow logische 1 (true)
- \Rightarrow völlig andere Semantik als in der Mathematik
- \Rightarrow völlig andere Funktion als die bitweisen Operationen

Achtung!

- ▶ verkürzte Auswertung von links nach rechts (*shortcut*)
 - ▶ Abbruch, wenn Ergebnis feststeht
 - + kann zum Schutz von Ausdrücken benutzt werden
 - kann aber auch Seiteneffekte haben, z.B. Funktionsaufrufe

▶ Beispiele

- ▶ `(a > b) || ((b != c) && (b <= d))`

Ausdruck	Wert
<code>!0x41</code>	<code>0x00</code>
<code>!0x00</code>	<code>0x01</code>
<code>!!0x00</code>	<code>0x00</code>
<code>0x69 && 0x55</code>	<code>0x01</code>
<code>0x69 0x55</code>	<code>0x01</code>

Logische Operationen in C: Logisch vs. Bitweise

- ▶ der Zahlenwert $0 \Leftrightarrow$ logische 0 (false)
alle anderen Werte \Leftrightarrow logische 1 (true)
- ▶ Beispiel: $x = 0x66$ und $y = 0x93$

bitweise Operation		logische Operation	
Ausdruck	Wert	Ausdruck	Wert
x	0110 0110	x	0000 0001
y	1001 0011	y	0000 0001
$x \& y$	0000 0010	$x \&\& y$	0000 0001
$x y$	1111 0111	$x y$	0000 0001
$\sim x \sim y$	1111 1101	$!x !y$	0000 0000
$x \& \sim y$	0110 0100	$x \&\& !y$	0000 0000

- ▶ logische Ausdrücke werden von links nach rechts ausgewertet
- ▶ Klammern werden natürlich berücksichtigt
- ▶ Abbruch, sobald der Wert eindeutig feststeht (*shortcut*)
- ▶ Vor- oder Nachteile möglich (codeabhängig)
 - + `(a && 5/a)` niemals Division durch Null. Der Quotient wird nur berechnet, wenn der linke Term ungleich Null ist.
 - + `(p && *p++)` niemals Nullpointer-Zugriff. Der Pointer wird nur verwendet, wenn `p` nicht Null ist.

Ternärer Operator

- ▶ `<condition> ? <true-expression> : <>false-expression>`
- ▶ Beispiel: `(x < 0) ? -x : x` Absolutwert von `x`

- ▶ Java definiert eigenen Datentyp `boolean`
- ▶ elementare Werte `false` und `true`
- ▶ alternativ `Boolean.FALSE` und `Boolean.TRUE`
- ▶ **keine** Mischung mit Integer-Werten wie in C

- ▶ Vergleichsoperatoren `<`, `<=`, `==`, `!=`, `>`, `>=`
- ▶ verkürzte Auswertung von links nach rechts (*shortcut*)

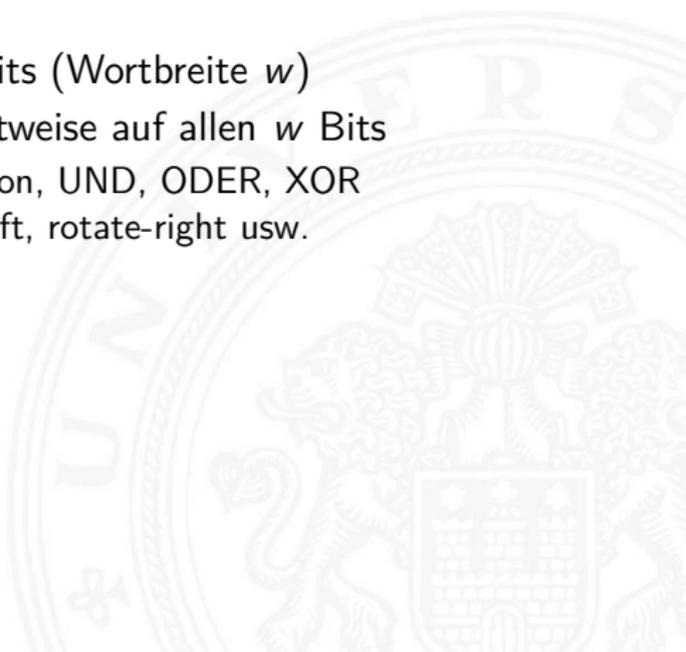
Ternärer Operator

- ▶ $\langle \textit{condition} \rangle ? \langle \textit{true-expression} \rangle : \langle \textit{false-expression} \rangle$
- ▶ Beispiel: $(x < 0) ? -x : x$ Absolutwert von x



Integer-Datentypen doppelt genutzt:

1. Zahlenwerte (Ganzzahl, Zweierkomplement, Gleitkomma)
arithmetische Operationen: Addition, Subtraktion usw.
2. Binärwerte mit w einzelnen Bits (Wortbreite w)
Boole'sche Verknüpfungen, bitweise auf allen w Bits
 - ▶ Grundoperationen: Negation, UND, ODER, XOR
 - ▶ Schiebe-Operationen: shift-left, rotate-right usw.



Bitweise logische Operationen (cont.)

- ▶ Integer-Datentypen interpretiert als Menge von Bits
- ⇒ bitweise logische Operationen möglich

- ▶ in Java und C sind vier Operationen definiert:

Negation	$\sim x$	Invertieren aller einzelnen Bits
UND	$x \& y$	Logisches UND aller einzelnen Bits
OR	$x y$	–"– ODER –"–
XOR	$x \wedge y$	–"– XOR –"–

- ▶ alle anderen Funktionen können damit dargestellt werden
es gibt insgesamt 2^{2^n} Operationen mit n Operanden

Bitweise logische Operationen: Beispiel

$$x = 0010\ 1110$$

$$y = 1011\ 0011$$

$$\sim x = 1101\ 0001 \quad \text{alle Bits invertiert}$$

$$\sim y = 0100\ 1100 \quad \text{alle Bits invertiert}$$

$$x \ \& \ y = 0010\ 0010 \quad \text{bitweises UND}$$

$$x \ | \ y = 1011\ 1111 \quad \text{bitweises ODER}$$

$$x \ ^ \ y = 1001\ 1101 \quad \text{bitweises XOR}$$



- ▶ Ergänzung der bitweisen logischen Operationen
- ▶ für alle Integer-Datentypen verfügbar

- ▶ fünf Varianten

Shift-Left `shl`

 Logical Shift-Right `srl`

Arithmetic Shift-Right `sra`

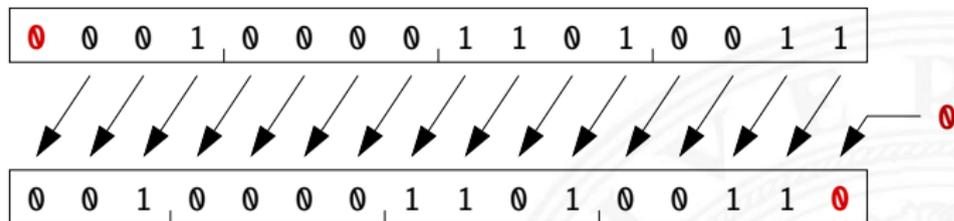
Rotate-Left `rol`

Rotate-Right `ror`

- ▶ Schiebeoperationen in Hardware leicht zu realisieren
- ▶ auf fast allen Prozessoren im Befehlssatz

Shift-Left (shl)

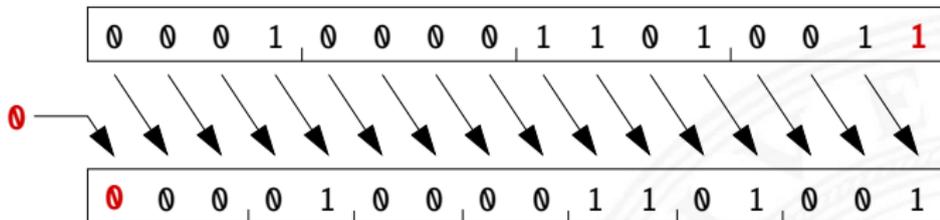
- ▶ Verschieben der Binärdarstellung von x um n bits nach links
- ▶ links herausgeschobene n bits gehen verloren
- ▶ von rechts werden n Nullen eingefügt



- ▶ in Java und C direkt als Operator verfügbar: $x \ll n$
- ▶ `shl` um n bits entspricht der Multiplikation mit 2^n

Logical Shift-Right (sr1)

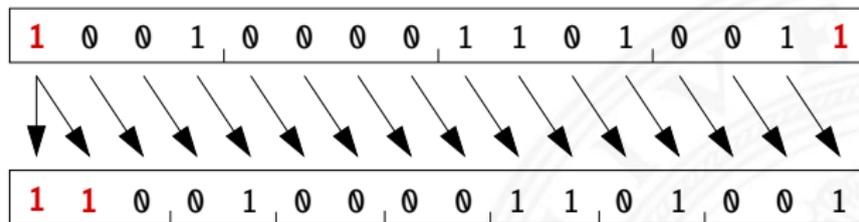
- ▶ Verschieben der Binärdarstellung von x um n bits nach rechts
- ▶ rechts herausgeschobene n bits gehen verloren
- ▶ von links werden n Nullen eingefügt



- ▶ in Java direkt als Operator verfügbar: $x \ggg n$
in C nur für unsigned-Typen definiert: $x \gg n$
für signed-Typen nicht vorhanden

Arithmetic Shift-Right (sra)

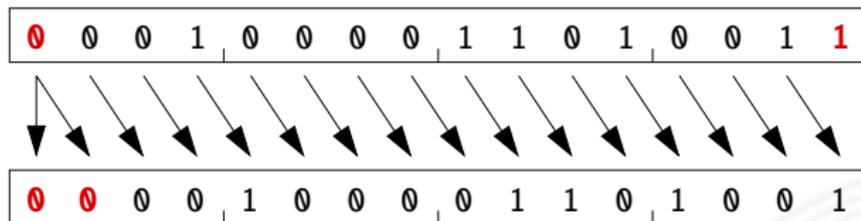
- ▶ Verschieben der Binärdarstellung von x um n bits nach rechts
- ▶ rechts herausgeschobene n bits gehen verloren
- ▶ von links wird n -mal das MSB (Vorzeichenbit) eingefügt
- ▶ Vorzeichen bleibt dabei erhalten (gemäß Zweierkomplement)



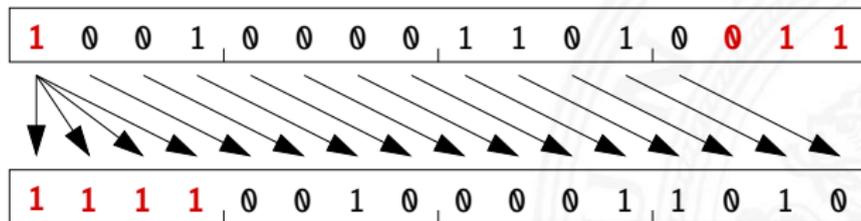
- ▶ in Java direkt als Operator verfügbar: `x >> n`
in C nur für signed-Typen definiert: `x >> n`
- ▶ sra um n bits ist ähnlich der Division durch 2^n

Arithmetic Shift-Right: Beispiel

- ▶ $x \gg 1$ aus $0x10D3$ (4307) wird $0x0869$ (2153)



- ▶ $x \gg 3$ aus $0x90D3$ (-28460) wird $0xF21A$ (-3558)



Arithmetic Shift-Right: Division durch Zweierpotenzen?

- ▶ positive Werte: $x \gg n$ entspricht Division durch 2^n
- ▶ negative Werte: $x \gg n$ ähnlich Division durch 2^n
aber Ergebnis ist zu klein!
- ▶ gerundet in Richtung negativer Werte statt in Richtung Null:

1111 1011 (-5)

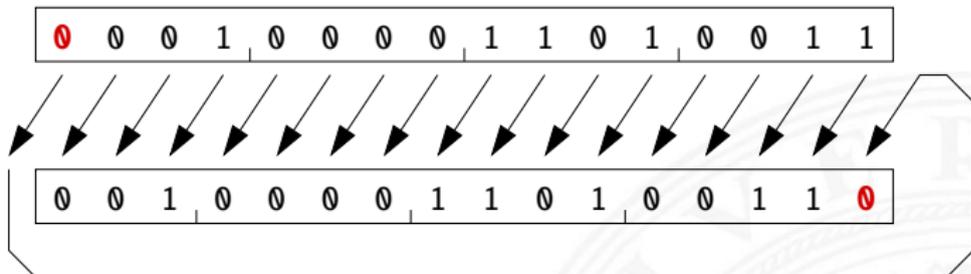
1111 1101 (-3)

1111 1110 (-2)

1111 1111 (-1)

- ▶ in C: Kompensation durch Berechnung von $(x + (1 \ll k) - 1) \gg k$
Details: Bryant, O'Hallaron [BO15]

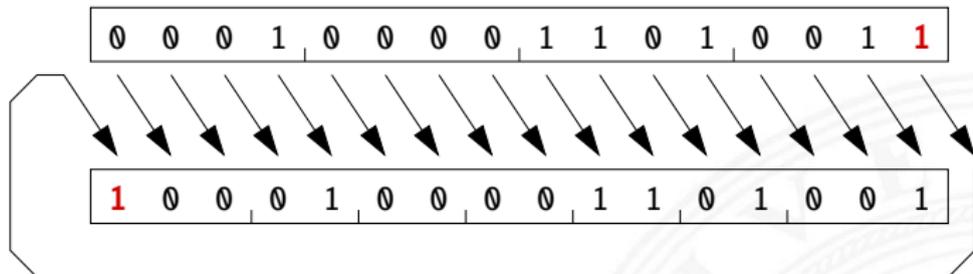
- ▶ Rotation der Binärdarstellung von x um n bits nach links
- ▶ herausgeschobene Bits werden von rechts wieder eingefügt



- ▶ in Java und C nicht als Operator verfügbar
- ▶ Java: `Integer.rotateLeft(int x, int distance)`

Rotate Right (ror)

- ▶ Rotation der Binärdarstellung von x um n bits nach rechts
- ▶ herausgeschobene Bits werden von links wieder eingefügt



- ▶ in Java und C nicht als Operator verfügbar
- ▶ Java: `Integer.rotateRight(int x, int distance)`

Shifts statt Integer-Multiplikation

- ▶ Integer-Multiplikation ist auf vielen Prozessoren langsam oder evtl. gar nicht als Befehl verfügbar
- ▶ Add./Subtraktion und logische Operationen: typisch 1 Takt
Shift-Operationen: meistens 1 Takt
- ⇒ eventuell günstig, Multiplikation mit Konstanten durch entsprechende Kombination aus shifts+add zu ersetzen
 - ▶ Beispiel: $9 \cdot x = (8 + 1) \cdot x$ ersetzt durch $(x \ll 3) + x$
 - ▶ viele Compiler erkennen solche Situationen

Bits an Position p in einem Integer setzen oder löschen?

- ▶ Maske erstellen, die genau eine 1 gesetzt hat
- ▶ dies leistet $(1 \ll p)$, mit $0 \leq p \leq w$ bei Wortbreite w

```
public int bit_set( int x, int pos ) {  
    return x | (1 << pos);      // mask = 0...010...0  
}  
  
public int bit_clear( int x, int pos ) {  
    return x & ~(1 << pos);    // mask = 1...101...1  
}
```

Beispiel: Byte-Swapping *network to/from host*

Linux: `/usr/include/bits/byteswap.h`

(distributionsabhängig)

```
...
/* Swap bytes in 32 bit value.  */
#define __bswap_32(x) \
    (((x) & 0xff000000) >> 24) | (((x) & 0x00ff0000) >> 8) |\
    (((x) & 0x0000ff00) << 8) | (((x) & 0x000000ff) << 24)
...
```

Linux: `/usr/include/netinet/in.h`

```
...
# if __BYTE_ORDER == __LITTLE_ENDIAN
#   define ntohl(x) __bswap_32 (x)
#   define ntohs(x) __bswap_16 (x)
#   define htonl(x) __bswap_32 (x)
#   define htons(x) __bswap_16 (x)
# endif
...
```



Farbdarstellung am Monitor / Bildverarbeitung?

- ▶ Matrix aus $w \times h$ Bildpunkten
- ▶ additive Farbmischung aus Rot, Grün, Blau
- ▶ pro Farbkanal typischerweise 8-bit, Wertebereich $0 \dots 255$
- ▶ Abstufungen ausreichend für (untrainiertes) Auge

- ▶ je ein 32-bit Integer pro Bildpunkt
- ▶ typisch: `0x00RRGGBB` oder `0xAARRGGBB`
- ▶ je 8-bit für Alpha/Transparenz, rot, grün, blau

- ▶ `java.awt.image.BufferedImage(TYPE_INT_ARGB)`

```
public BufferedImage redFilter( BufferedImage src ) {
    int    w = src.getWidth();
    int    h = src.getHeight();
    int type = BufferedImage.TYPE_INT_ARGB;
    BufferedImage dest = new BufferedImage( w, h, type );

    for( int y=0; y < h; y++ ) {           // alle Zeilen
        for( int x=0; x < w; x++ ) {       // von links nach rechts
            int  rgb = src.getRGB( x, y ); // Pixelwert bei (x,y)
                                                    // rgb = 0xAARRGGBB
            int  red = (rgb & 0x00FF0000); // Rotanteil maskiert
            dest.setRGB( x, y, red );
        }
    }
    return dest;
}
```

Beispiel: RGB-Graufilter

```
public BufferedImage grayFilter( BufferedImage src ) {  
    ...  
    for( int y=0; y < h; y++ ) { // alle Zeilen  
        for( int x=0; x < w; x++ ) { // von links nach rechts  
            int  rgb = src.getRGB( x, y ); // Pixelwert  
            int  red = (rgb & 0x00FF0000) >>>16; // Rotanteil  
            int  green = (rgb & 0x0000FF00) >>> 8; // Grünanteil  
            int  blue = (rgb & 0x000000FF); // Blauanteil  
  
            int  gray = (red + green + blue) / 3; // Mittelung  
  
            dest.setRGB( x, y, (gray<<16)|(gray<<8)|gray );  
        }  
    }  
    ...  
}
```

Beispiel: Bitcount – while-Schleife

Anzahl der gesetzten Bits in einem Wort?

- ▶ Anwendung z.B. für Kryptalgorithmen (Hamming-Abstand)
- ▶ Anwendung für Medienverarbeitung

```
public static int bitcount( int x ) {  
    int count = 0;  
  
    while( x != 0 ) {  
        count += (x & 0x00000001); // unterstes bit addieren  
        x = x >>> 1; // 1-bit rechts-schieben  
    }  
  
    return count;  
}
```

Beispiel: Bitcount – parallel, tree

- ▶ Algorithmus mit Schleife ist einfach aber langsam
- ▶ schnelle parallele Berechnung ist möglich

```
int BitCount(unsigned int u)
{ unsigned int uCount;
  uCount = u - ((u >> 1) & 033333333333)
            - ((u >> 2) & 011111111111);
  return ((uCount + (uCount >> 3)) & 030707070707) % 63;
}
```

- ▶ `java.lang.Integer.bitCount()`

```
public static int bitCount(int i) {
  // HD, Figure 5-2
  i = i - ((i >>> 1) & 0x55555555);
  i = (i & 0x33333333) + ((i >>> 2) & 0x33333333);
  i = (i + (i >>> 4)) & 0x0f0f0f0f;
  i = i + (i >>> 8);
  i = i + (i >>> 16);
  return i & 0x3f;
}
```

Beispiel: Bitcount – parallel, tree (cont.)

- ▶ viele Algorithmen: bit-Maskierung und Schieben
 - ▶ <https://gurmeet.net/puzzles/fast-bit-counting-routines>
 - ▶ <https://graphics.stanford.edu/~seander/bithacks.html>
 - ▶ <https://tekpool.wordpress.com/category/bit-count/>
 - ▶ D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming*: Volume 4A, Combinational Algorithms: Part1, Abschnitt 7.1.3 [Knu09]
- ▶ viele neuere Prozessoren/DSPs: eigener bitcount-Befehl

Tipps & Tricks: Rightmost bits

D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming*, Vol 4.1 [Knu09]

Grundidee: am weitesten rechts stehenden 1-Bits / 1-Bit Folgen erzeugen Überträge in arithmetischen Operationen

▶ Integer x , mit $x = (\alpha 0 [1]^a 1 [0]^b)_2$

beliebiger Bitstring α , eine Null, dann $a + 1$ Einsen und b Nullen, mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

▶ Ausnahmen: $x = -2^b$ und $x = 0$

$$\Rightarrow x = (\alpha 0 [1]^a 1 [0]^b)_2$$

$$\bar{x} = (\bar{\alpha} 1 [0]^a 0 [1]^b)_2$$

$$x - 1 = (\alpha 0 [1]^a 0 [1]^b)_2$$

$$-x = (\bar{\alpha} 1 [0]^a 1 [0]^b)_2$$

$$\Rightarrow \bar{x} + 1 = -x = \overline{x - 1}$$

- [BO15] R.E. Bryant, D.R. O'Hallaron:
Computer systems – A programmers perspective.
3rd global ed., Pearson Education Ltd., 2015.
ISBN 978–1–292–10176–7. csapp.cs.cmu.edu
- [TA14] A.S. Tanenbaum, T. Austin: *Rechnerarchitektur –
Von der digitalen Logik zum Parallelrechner.*
6. Auflage, Pearson Deutschland GmbH, 2014.
ISBN 978–3–8689–4238–5

- [Knu09] D.E. Knuth: *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 1, Bitwise Tricks & Techniques; Binary Decision Diagrams*. Addison-Wesley Professional, 2009. ISBN 978-0-321-58050-4
- [Hei05] K. von der Heide: *Vorlesung: Technische Informatik 1 — interaktives Skript*. Universität Hamburg, FB Informatik, 2005. tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2004ws/vorlesung/t1