64-041 Übung Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

Aufgabenblatt 6 Ausgabe: 09.12., Abgabe: 16.12. 24:00

Gruppe	
Name(n)	Matrikelnummer(n)

Aufgabe 6.1 (Punkte 5+15+10)

Codierung: Für eine Winkelcodierscheibe mit 15 ^{o} Grad Auflösung soll ein einschrittiger zyklischer Binärcode entwickelt werden.

(a) Wie viele Codewörter hat der Code?

(b) Entwickeln Sie einen Code mit dem rekursiven Verfahren aus der Vorlesung.

(c) Warum kann es keinen zyklisch-einschrittigen (Binär-) Code mit ungerader Zahl von Codewörtern geben?

Aufgabe 6.2 (Punkte 5+15+5+5)

Fano-Codierung: Die folgenden 10 Symbole a_i sind mit ihren Wahrscheinlichkeiten $p(a_i)$ in der Tabelle angegeben:

a_i	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$p(a_i)$	0,14	0,02	0,3	0,08	0,01	0,05	0,1	0,06	0,09	0,15

(a) Wie groß ist der mittlere Informationsgehalt (die Entropie) H dieser Symbole?

(b) Geben Sie eine Fano-Codierung für diese Symbole an.

(c) Welche mittlere Codewortlänge H_0 ergibt sich?

(d) Wie groß ist die Redundanz ($H_0 - H$) ihres Codes?

Aufgabe 6.3 (Punkte 10+10)

Huffman-Codierung: Das Huffman-Verfahren ist nicht auf Binärsymbole beschränkt. Bei der $Radix - r$ Huffman-Codierung wird ein optimaler Code mit Codewörtern variabler Länge auf dem Alphabet der Symbole $\{0, 1, \ldots r-1\}$ aufgebaut. Bei der Konstruktion des Codebaums werden dabei jeweils die r Symbole (oder Knoten) mit der geringsten Symbolhäufigkeit zu einem neuen Knoten zusammengefasst. Nachdem der Baum komplett ist, werden in jeder Stufe die einzelnen Symbole $0, 1, \ldots r-1$ zugeordnet. Die einzige Komplikation besteht darin, dass abhängig von der Anzahl der zu codierenden Symbole eventuell ein Knoten des fertigen Codebaums weniger als r Kinder hat. Damit der erzeugte Code später minimale Länge hat, darf dieser nicht komplett „ausgelastete" Knoten allerdings nicht an der Wurzel des Baums sitzen (dann würden kurze Codewörter verschwendet), sondern muss ganz zu Anfang der Konstruktion (bei den längsten Codewörtern) eingefügt werden.

(a) Gegeben sei die Basis r und eine Anzahl n von zu codierenden Symbolen a_i mit Wahrscheinlichkeiten $p(a_i)$, mit $i = 0, \ldots n-1$. Überlegen Sie sich, wieviele Symbole m (mit den kleinsten Wahrscheinlichkeiten $p(a_j)$ im allerersten Schritt abhängig von r und n zusammengefasst werden müssen.

(b) Das folgende Beispiel stammt aus dem Originalpaper von Huffman. Wir haben $r = 4$ und die folgenden $n = 8$ Symbole a_i mit Wahrscheinlichkeiten $p(a_i)$:

a_i	a	b	c	d	e	f	g	h
$p(a_i)$	0,22	0,20	0,18	0,15	0,10	0,08	0,05	0,02

Konstruieren Sie den $Radix - 4$ Huffman-Codebaum für diese Symbole und geben Sie die zugehörige Huffman-Codierung an.

Aufgabe 6.4 (Punkte 10+10)

Informationstheorie: Die Dezimalziffern (0...9) werden neu codiert...

(a) Im ersten Ansatz sollen Sie eine Codierung wählen, die die Ziffern auf 4-bit Binärwörter abbildet, wie beispielsweise die BCD-Codierung. Geben Sie Ihren Code, den möglichen Informationsgehalt H_0, die Entropie H und die Redundanz R an.

(b) Versuchen Sie, die Redundanz zu verkleinern, indem Sie jeweils zwei Dezimalziffern zu einem Codewort zusammenfassen. Die Menge der Ausgangs-Codewörter ist deshalb $\{00, 01, 02, \ldots\ 10, 11, \ldots\ 97, 98, 99\}$.

Wie viele Bits werden für die Codewörter benötigt? Geben Sie Ihren Code, den möglichen Informationsgehalt H_0, die Entropie H und die Redundanz R an. Wie groß ist jetzt die Redundanz bezogen auf eine einzelne Dezimalziffer?