WS 2004/05	Übungen Technische Informatik 1 (T1)	Musterlösung zu Aufgabenblatt 3

Lösung 3.1

Der Hamming-Code ist so konstruiert, dass jeweils drei Informationsbits mit einem Prüfbit auf gerade Parität gesetzt werden.
Die Betrachtung des Prüfschemas ergibt, dass alle möglichen Einzelbitfehler lokalisiert und korrigiert werden können. Für jede verfälschte Codewortstelle sind eine odere mehrere Prüfbedingungen nicht erfüllt.

Falsche Codewortstelle	Nicht erfüllte Prüfbedingungen
a_1	A
a_2	B
a_3	A + B
a_4	C
a_5	A + C
a_6	B + C
a_7	A + B + C

Für jeden Einzelbitfehler ergibt sich demnach eine andere Kombination nicht erfüllter Prüfbedingungen.
Um einen Einzelbitfehler zu lokalisieren, bildet man aus den Prüfgruppen A, B und C das Prüfwort mit den Stellen x_a, x_b, x_c, wobei gilt:

$$x_a = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) \; mod \; 2$$

$$x_b = (a_2 + a_3 + a_6 + a_7) \; mod \; 2$$

$$x_c = (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \; mod \; 2 \quad .$$

Wenn das Prüfwort (x_c, x_b, x_a) als Dualzahl interpretiert wird, gibt der Wert der Dualzahl gerade die verfälschte Codewortstelle $i = 2^2 \cdot x_c + 2^1 \cdot x_b + 2^0 \cdot x_a$ an. Ist dieser Wert 0, so liegt kein (korrigierbarer) Fehler vor. Betrachtung des Beispiels:

- Codierung der Dezimalzahl 9:

Dezimal-Code	Dual-Code	Hamming-Code
9	1001	0011001

- Verfälschung der Codewortstelle a_5:
  resultierendes Binärwort ist 0011101
- Bildung des Prüfworts: $x_a = 1$, $x_b = 0$, $x_c = 1$
  $(101)_2 \Leftrightarrow (5)_{10} \quad \Rightarrow$ fünfte Codewortstelle ist falsch!

Lösung 3.2

a) Eine (naheliegende) Abbildung der Dezimalziffern auf Tetraden stellt der BCD-Code dar:

$$\{0, \ldots, 9\} \quad \rightarrow \quad \{0000, 0001, \ldots, 1001\}$$

Entscheidungsgehalt H_0:

Mit 4 Stellen können maximal $2^4 = 16$ Codewörter gebildet werden, also ist

$$\begin{aligned} H_0 &= \operatorname{ld} 16 \\ &= 4 \text{ bit} \quad . \end{aligned}$$

Mittlerer Informationsgehalt H:

Es werden $N = 10$ Codewörter benutzt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der eines der Codewörter auftritt, sei für alle Codewörter gleich. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{N} p(x_i) \cdot \operatorname{ld} \frac{1}{p(x_i)} \\ &= 10 \cdot \frac{1}{10} \cdot \operatorname{ld} 10 \\ &= 3{,}32 \text{ bit} \quad . \end{aligned}$$

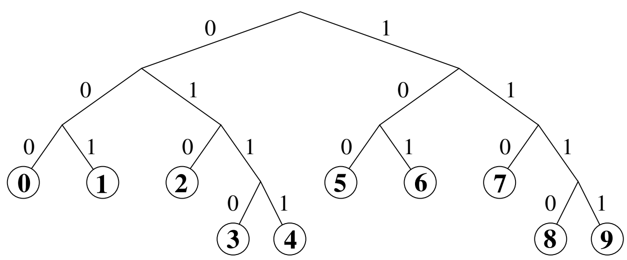
Redundanz R:

$$\begin{aligned} R &= H_0 - H \\ &= (4 - 3{,}32) \text{ bit} \\ &= 0{,}68 \text{ bit} \end{aligned}$$

b) Die folgende Codetabelle gibt einen von mehreren denkbaren Codes variabler Länge an.

Ziffer	Codewort
0	000
1	001
2	010
3	0110
4	0111
5	100
6	101
7	110
8	1110
9	1111

zugehöriger Codebaum:



Die Redundanz des Codes ergibt sich als Differenz der mittleren Codewortlänge $\bar{l}$ und dem mittleren Informationsgehalt des Codes:

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \sum_{i=1}^{10} p(x_i) \cdot l_i \qquad \text{, wobei } l_i \text{ die Länge des Codeworts } i \text{ bezeichnet,} \\ &= \frac{1}{10} \cdot (6 \cdot 3 + 4 \cdot 4) \\ &= 3{,}4 \text{ bit} \quad . \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R &= \bar{l} - H \\
&= (3,4 - 3,32) \text{ bit} \\
&= 0,08 \text{ bit}
\end{aligned}
$$

c) Bildet man die 100 verschiedenen Paare von Dezimalziffern auf einen binären Code fester Wortlänge ab, so müssen wenigstens siebenstellige Binärwörter benutzt werden.

Die mittlere Codewortlänge für die Codierung <u>einer</u> Dezimalziffer ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
\bar{l} &= \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} \cdot 7 \text{ bit} \\
&= 3,5 \text{ bit} \quad .
\end{aligned}
$$

Der mittlere Informatinsgehalt einer einzelnen Dezimalziffer wurde bereits in Aufgabenteil a) berechnet und ist unverändert

$$
H = 3,32 \text{ bit} \quad .
$$

Als Redundanz pro Dezimalziffer ergibt sich deshalb

$$
\begin{aligned}
R &= \bar{l} - H \\
&= (3,5 - 3,32) \text{ bit} \\
&= 0,18 \text{ bit} \quad .
\end{aligned}
$$

Offenbar ist die Redundanz in c) größer als bei der Codierung mit variabler Codewortlänge in Aufgabenteil b). Durch eine Kombination beider Verfahren (variable Wortlänge für Einzelziffern und Zusammenfassung zu Zifferngruppen) lässt sich die Redundanz weiter verringern.

Lösung 3.3

Geordnete Codewörter	$p(a_i)$	Aufteilung				Resultierende Codewörter
a	0,25	0	0			00
b	0,25		1			01
c	0,125	1	0	0		100
d	0,125			1		101
e	0,125		1	0		110
f	0,0625			1	0	1110
g	0,0625				1	1111

Mittlerer Informationsgehalt H:

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^{N} p(a_i) \cdot \operatorname{ld} \frac{1}{p(a_i)} \\
&= 2 \cdot 0,25 \cdot \operatorname{ld} \frac{1}{0,25} + 3 \cdot 0,125 \cdot \operatorname{ld} \frac{1}{0,125} + 2 \cdot 0,0625 \cdot \operatorname{ld} \frac{1}{0,0625} \\
&= 2,625 \text{ bit}
\end{aligned}
$$

Lösung 3.4

In der Vorlesung wurde bewiesen:
$\mathbb{B} = \{0, 1\}$ ist eine kommutative Gruppe mit der durch die Tabelle

+	0	1
0	0	1
1	1	0

gegebenen Operation. Wir bilden ab: $\mathbb{M} \leftrightarrow \mathbb{B}$; $'+1' \leftrightarrow 0$; $'-1' \leftrightarrow 1$. Die Multiplikation in $\mathbb{M}$ entspricht dann der Operation + in $\mathbb{B}$ mit der Tabelle

*	'+1'	'-1'
'+1'	'+1'	'-1'
'-1'	'-1'	'+1'

Es liegt ein Isomorphismus vor.

Lösung 3.5

Wir nutzen wie bei Aufgabe 3.4 den Isomorphismus und bilden den Körper $\{0, 1\}$ mit der Null 0 ab auf $\mathbb{M}$ mit dem neutralen Element $'+1'$. Als Addition hat man dann obige "Multiplikation"

'+'	'+1'	'-1'
'+1'	'+1'	'-1'
'-1'	'-1'	'+1'

und die Multiplikation mit dem neutralen Element $'-1'$

'*'	'+1'	'-1'
'+1'	'+1'	'+1'
'-1'	'+1'	'-1'

Lösung 3.6 Wir lösen das System im isomorphen Körper $\mathbb{B}$:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Addition von Gleichung (2) und (3) liefert $x = 1$. Damit folgt aus Gleichung (1) $y = 0$ und damit aus Gleichung (2) $z = 0$. Die Abbildung nach $\mathbb{M}$ liefert dann $x =' -1', y =' +1', z =' +1'$

Lösung 3.7

Unter Benutzung von $a \vee \overline{a} = \mathbf{1}$, $a \vee a = a$, $\overline{a}a = 0$ und $a\,a = a$ findet man

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee z) \\ &= \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}z \vee \underbrace{y\,\overline{y}}_{=0} \vee yz \\ &= \overline{x}\,\overline{y}\underbrace{(\overline{z} \vee z)}_{=1} \vee \overline{x}\underbrace{(\overline{y} \vee y)}_{=1} z \vee \underbrace{(\overline{x} \vee x)}_{=1} yz \\ &= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \underline{\overline{x}\,\overline{y}z} \vee \underline{\overline{x}\,\overline{y}z} \vee \underline{\overline{x}yz} \vee \underline{\overline{x}yz} \vee xyz \\ &= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee xyz \end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte DNF.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee z) \\
&= (\overline{x} \vee y \vee \underbrace{\overline{z}\,z}_{=0})\,(\underbrace{\overline{x}\,x}_{=0} \vee \overline{y} \vee z) \\
&= (\overline{x} \vee y \vee \overline{z})\,(\overline{x} \vee y \vee z)\,(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)\,(x \vee \overline{y} \vee z)
\end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte KNF.

Unter Verwendung von $\overline{a} = a + 1, a \vee b = a + b + ab; a + a = 0$ findet man

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= (\overline{x} \vee y)\,(\overline{y} \vee z) \\
&= (x + 1 + y + (x+1)y)\,(y + 1 + z + (y+1)z) \\
&= (x + 1 + xy)\,(y + 1 + yz) \\
&= (1 + x + xy)\,(1 + y + yz) \\
&= 1 + x + xy + y + xy + xy + yz + xyz + xyz \\
&= 1 + x + y + xy + yz
\end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte RMF.

Ebenso findet man:
DNF: $g(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz$
Es sind alle Terme enthalten.

KNF: $g(x,y,z) = \mathbf{1}$

RMF: $g(x,y,z) = \mathbf{1}$