

Grundlagen der Regelungstechnik

Dr.-Ing. Georg von Wichert
Siemens AG, Corporate Technology, München

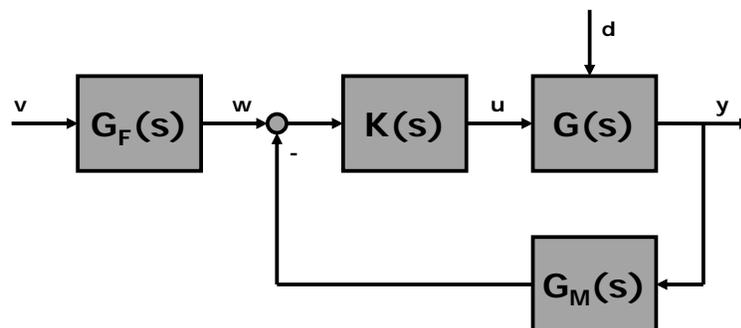
Termine

- Dies ist der letzte Termin in diesem Jahr
- 17.12.2004 fällt aus
- Nächste Termine: 14.1., 28.1., 4.2.

Wiederholung vom letzten Mal

Regelkreis

- Geschlossener Regelkreis



$G_F(s)$: Führungsfilter

$K(s)$: Regler

$G(s)$: Prozess

$G_M(s)$: Messglied

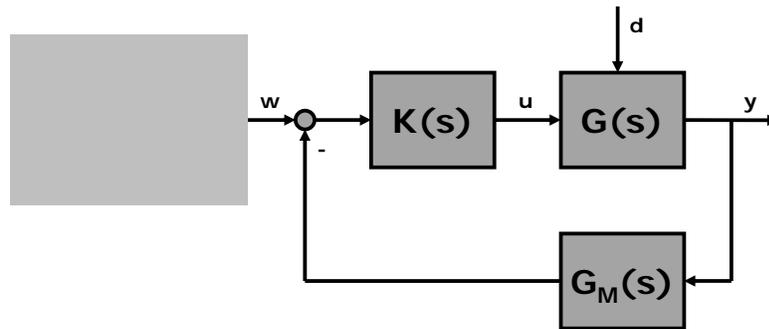
d : Störung

w : Führungsgröße

u : Stellgröße

y : Ausgangsgröße

Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises

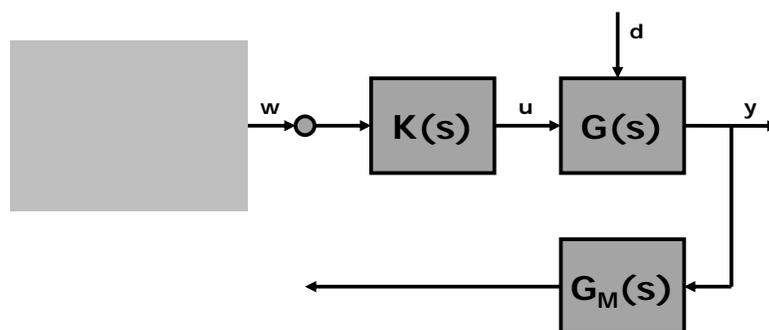


$$Y(s) = G(s)K(s)G_F(s)V(s) - G(s)K(s)G_M(s)Y(s)$$

Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $G_g(s)$:

$$G_g(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)G_M(s)}$$

Übertragungsfunktion des offenen Kreises



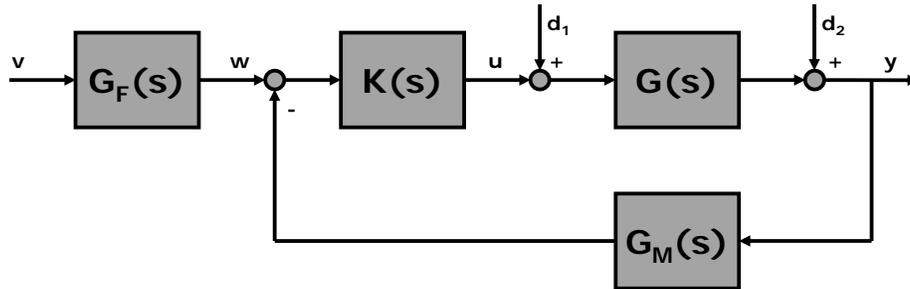
Offener Kreis

$$G_o(s) = K(s)G(s)G_M(s)$$

Geschlossener Kreis

$$G_g(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)G_M(s)}$$

Führungs- und Störübertragungsfunktionen

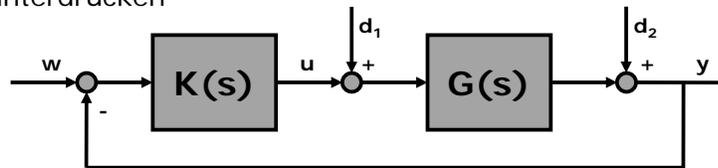


- Störung wird aufgeteilt auf
 - d1: Störung am Streckeneingang
 - d2: Störung am Streckenausgang

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_F(s)K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)G_M(s)}}_{\text{Führungsübertragungsfunktion}} \cdot V(s) + \underbrace{\frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)G_M(s)}}_{\text{Störübertragungsfunktionen}} \cdot D_1(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + K(s)G(s)G_M(s)}}_{\text{Störübertragungsfunktionen}} \cdot D_2(s)$$

Anforderungen an den Regelkreis

- Durch geeignete Wahl (Synthese) eines Reglers soll – bei gegebenem Prozess - dem geschlossenen Kreis ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden
- Der geschlossene Regelkreis soll
 - stabil sein
 - der Führungsgröße folgen
 - Störungen unterdrücken
- Beispiel:



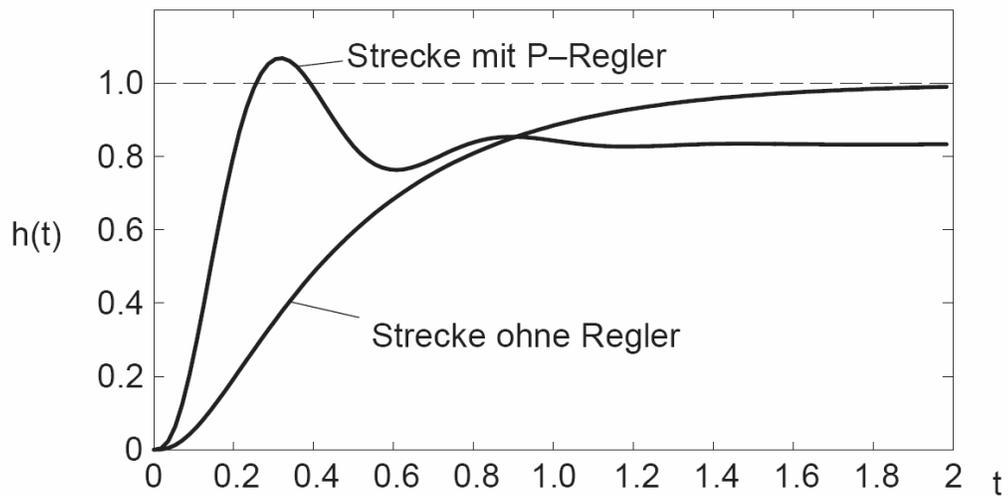
$$G(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

mit $T_1 = 0.4$, $T_2 = 0.1$ und $T_3 = 0.03$

$$K(s) = 5$$

P-Regler

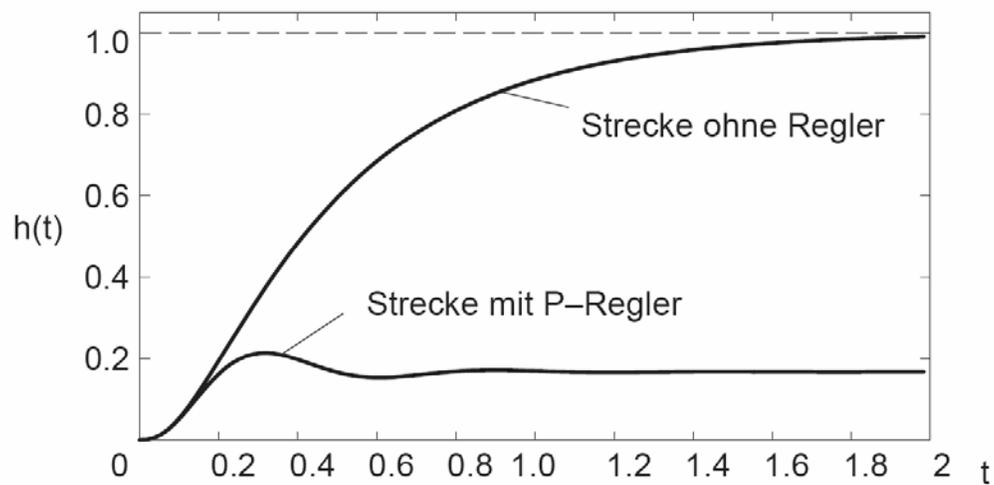
Beispiel (Schumacher-Skript)



Sprung der Führungsgröße w

Quelle: Schumacher/Leonhard, Grundlagen der Regelungstechnik

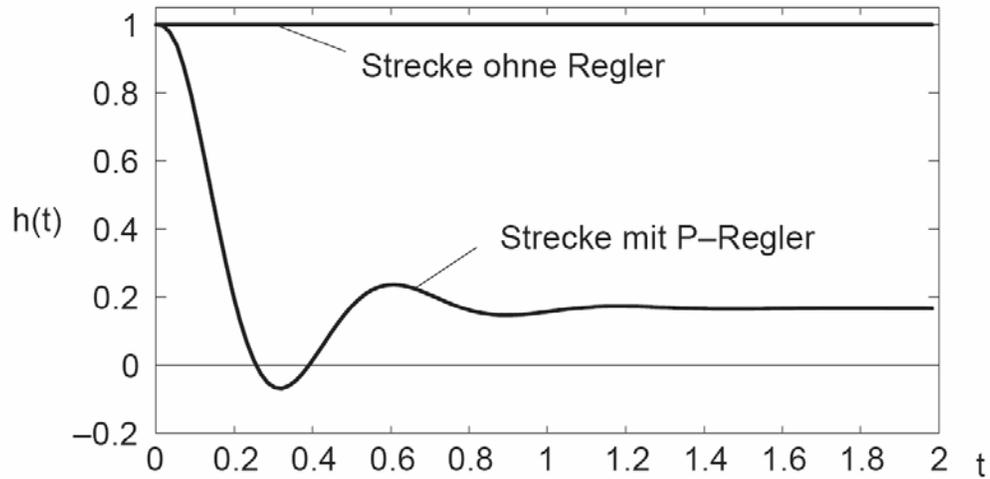
Beispiel (Schumacher-Skript)



Sprung der Störgröße d_1

Quelle: Schumacher/Leonhard, Grundlagen der Regelungstechnik

Beispiel (Schumacher-Skript)

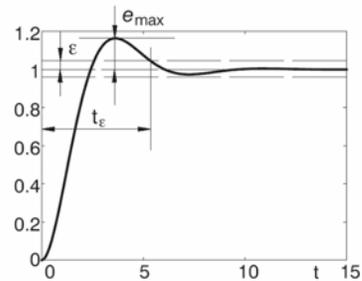


Sprung der Störgröße d_2

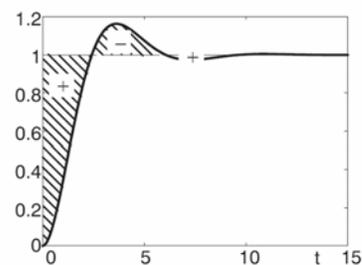
Quelle: Schumacher/Leonhard, Grundlagen der Regelungstechnik

Regelgüte

- Ausregelzeit t_ε
- Überschwingweite e_{\max}

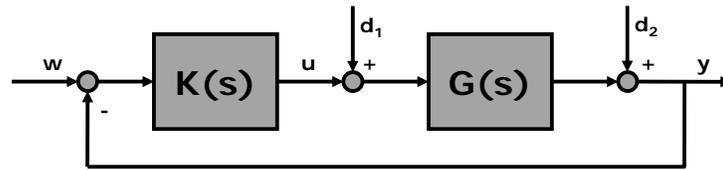


- Regelfläche
 - linear
 - quadratisch
 - Betrag



Quelle: Schumacher/Leonhard, Grundlagen der Regelungstechnik

Verhalten des Regelkreises: Ein Beispiel



$$K(s) = K \quad G(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

P-Regler

Prozess

Offener
Kreis

$$G_o(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

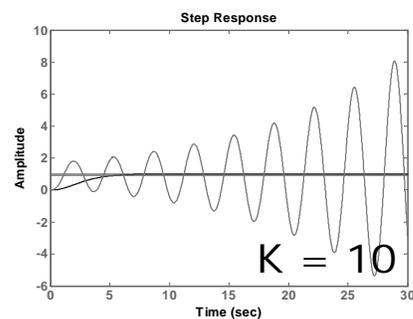
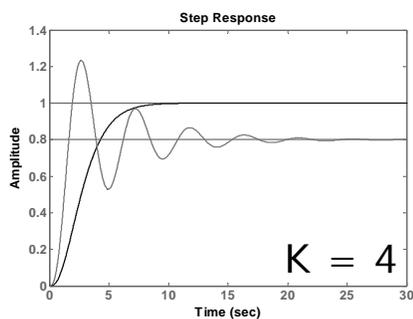
$$G_g(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)G_M(s)}$$

Geschlossener
Kreis

$$G_g(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$$

Stabilitätsbegriff

Ein lineares zeitinvariantes Übertragungsglied (LZI-Glied) ist dann stabil, wenn es auf eine beschränkte Eingangsgröße stets mit einer beschränkten Ausgangsgröße antwortet.



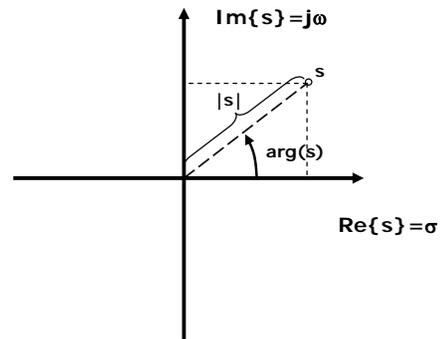
Grundlegendes Stabilitätskriterium

Ein lineares zeitinvariantes Übertragungsglied ist dann stabil, wenn die Pole seiner Übertragungsfunktion sämtlich links der imaginären Achse der komplexen Ebene liegen.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$



$$G(s) = b_m \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}$$



Grundlegendes Stabilitätskriterium

$$G(s) = b_m \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}$$



$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - s_i} + r_0$$

Partialbruchzerlegung

Sprungantwort (einfache Pole): $h(t) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t}$

Anmerkung:
 Partialbruchsumme für q-fachen Pol bei $s=\beta$: $\frac{c_1}{(s - \beta)} + \frac{c_2}{(s - \beta)^2} + \dots + \frac{c_q}{(s - \beta)^q}$

- Zu jedem Pol gehört ein exponentieller Ausgangssignalanteil
 - positive Realteile der Pole führen zu „aufklingendem“ Verhalten

Stabilitätskriterien

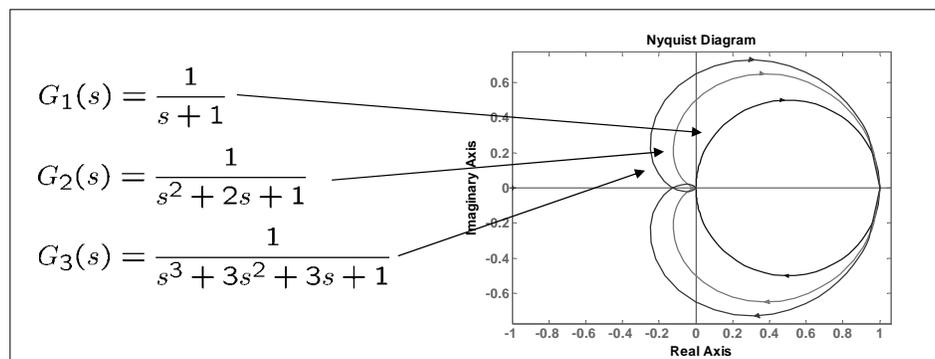
- Numerische Kriterien
 - Ausgehend von der Charakteristischen Gleichung
 - Algebraische Bedingungen für deren Koeffizienten

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = \prod_{i=1}^n (s - s_i) = 0$$

- z.B. Hurwitz-Kriterium
- Grafische Kriterien
 - Aussagen basierend auf dem Verlauf des Frequenzgangs, insbesondere des Phasenverlaufs
 - Dargestellt als Ortskurven
 - Nyquist-Kriterium

Nyquist-Kriterium

- Frage an den offenen Kreis: „Wenn ich Dich schließe, bist Du dann stabil?“
- Was weiß man über den offenen Kreis?
 - Rechnerisch: Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion
 - Messtechnisch: Frequenzgang
 - Bodediagramm
 - Ortskurve der Übertragungsfunktion



Analyse der Ortskurve

- Besonders gut sichtbar

- Betrag

$$|s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

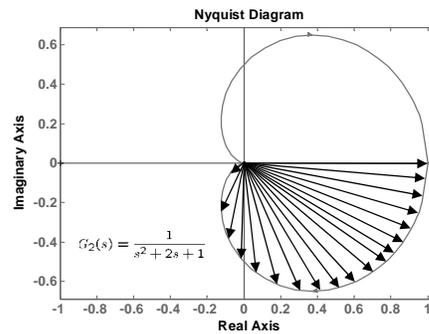
- Phasenwinkel

$$\varphi(s) = \arg(s) = \operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

- Phasenintegral

$$\Delta\varphi = \int_{s=0}^{s=j\infty} \varphi'(s) ds = \int_{s=0}^{s=j\infty} \frac{d\varphi}{ds}(s) ds = \int_{s=0}^{s=j\infty} d\varphi(s) = \int_{s=0}^{s=j\infty} d\varphi$$

$\Delta\varphi$ ist die gesamte Phasendrehung der Ortskurve für $s = j\omega = 0$ bis $s = j\omega = j\infty$



Phasenverlauf

Beliebige, gebrochen rationale Funktion $F(s)$

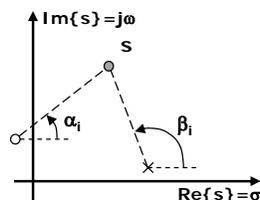
$$F(s) = b_m \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} = b_m \frac{\prod_{i=1}^m |s - s_{0i}| e^{j\alpha_i(s)}}{\prod_{i=1}^n |s - s_i| e^{j\beta_i(s)}}$$

$$|F(s)| = b_m \frac{\prod_{i=1}^m |s - s_{0i}|}{\prod_{i=1}^n |s - s_i|}$$

Betrag

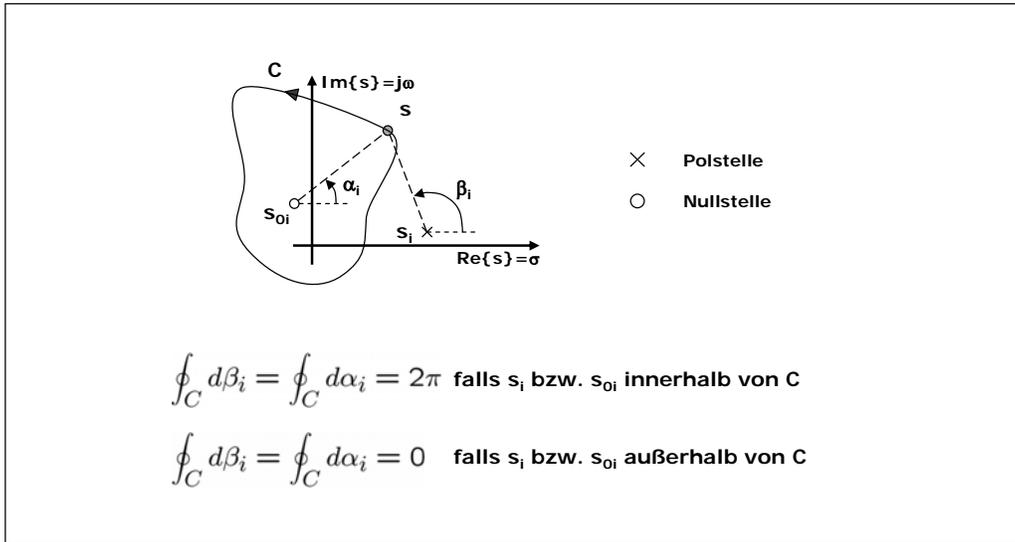
$$\varphi(s) = \arg H(s) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(s) - \sum_{i=1}^n \beta_i(s)$$

Phase

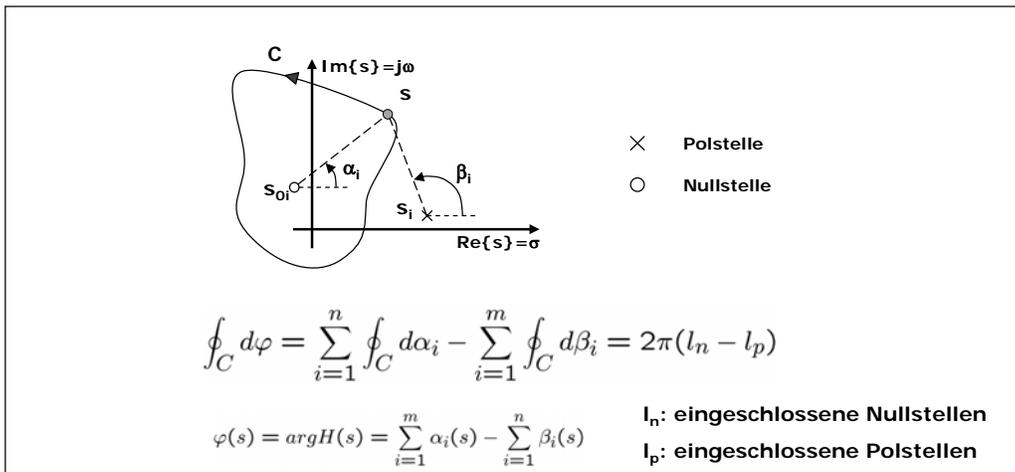


- × Polstelle
- Nullstelle

Phasenintegral



Phasenintegral



- Dies gilt allgemein für gebrochen rationale komplexe Funktionen
 - auch falls keine Polstellen vorhanden sind (z.B. einfaches Polynom)

Nyquist-Kriterium

- Kann man dem offenen Kreis „ansehen“, ob der geschlossene Kreis stabil sein wird?
 - Nyquist-Kriterium
 - Nullstellenbetrachtung für $N_g(s)$
 - $N_g(s)$ ist kein Polynom!
 - Die Pole des offenen Kreises sind die Pole von $N_g(s)$

$$G_g(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)G_M(s)}$$

$$G_o(s) = K(s)G(s)G_M(s)$$

$$G_g(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{Z_g(s)}{N_g(s)}$$

$$N_g(s) = 1 + G_o(s)$$

Phasenintegral $l_p - l_n = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\varphi$

Phasenintegral von $1 + G_o(s)$

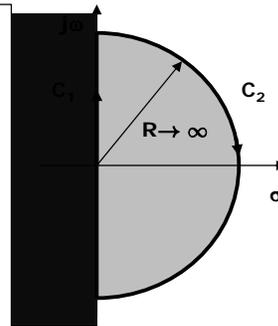
$$l_p - l_n = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\varphi = \frac{1}{2\pi} \left(\oint_{C_1} d\varphi + \oint_{C_2} d\varphi \right)$$

$$\oint_{C_1} d\varphi = \int_{s=-j\infty}^{s=j\infty} d\varphi = 2 \int_{\omega=0}^{\infty} d\varphi = 2\Delta\varphi$$

$$\oint_{C_2} d\varphi = 0 \quad \text{wegen} \quad d\varphi = 0 \quad \text{weil} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} G_o(s) = \text{const.}$$

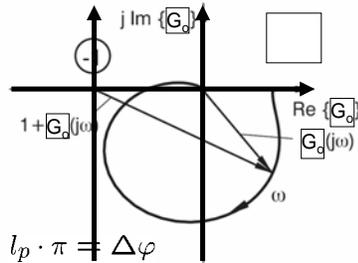
$$l_p - l_n = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\pi}$$

Stabilität des geschlossenen Kreises für $l_n = 0$ $\Rightarrow l_p \cdot \pi = \Delta\varphi$



Nyquist-Kriterium

- Wir betrachten die Ortskurve des offenen Kreises $G_o(s)$!
- Relevant: Phasendrehung von $N_g(s) = 1 + G_o(s)$
 - Phasendrehung von $G_o(s)$ bzgl. des Punktes -1



Die Ortskurve des offenen Kreises muss den Punkt -1 für den Durchlauf der Frequenzen ω von $-\infty$ bis ∞ so oft gegen den Uhrzeigersinn umlaufen, wie der offene Kreis Pole in der rechten Halbebene besitzt.

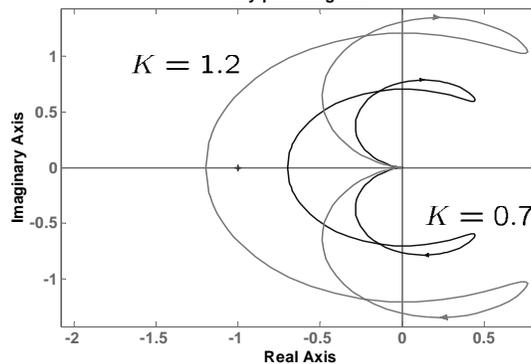
Beispiel: Instabiler offener Kreis

- Offener Kreis
 - Instabil
- Geschlossener Kreis
 - Stabilität für $K = 1.2$

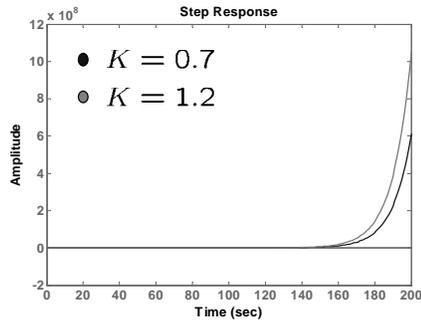
$$G_o(s) = K \cdot \frac{s + 0.1}{(s^2 + s + 1)(s - 0.1)}$$

$$l_p \cdot \pi = \Delta\varphi \quad l_p = 1$$

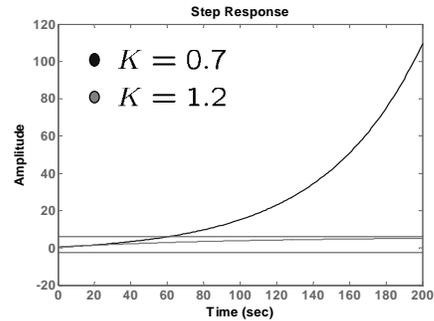
Nyquist Diagram



Beispiel: Instabiler offener Kreis

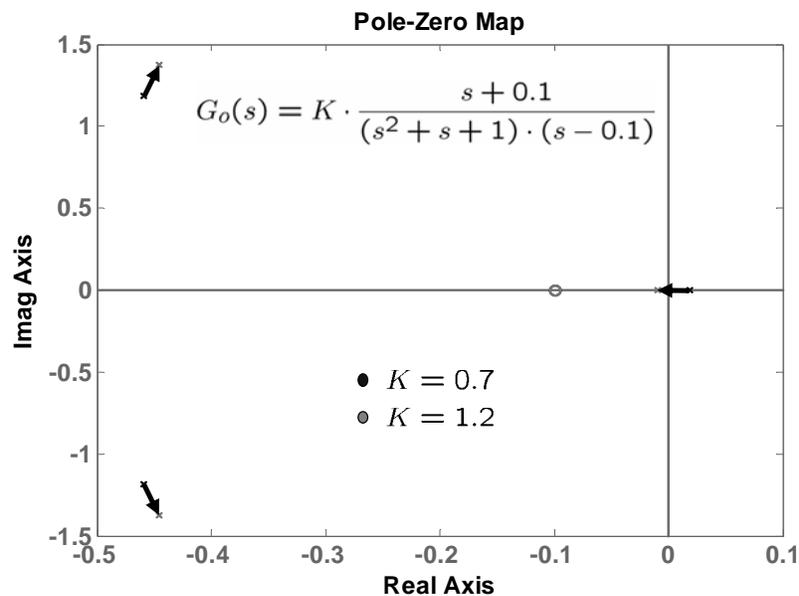


- Sprungantworten der offenen Kreise
 - Beide instabil

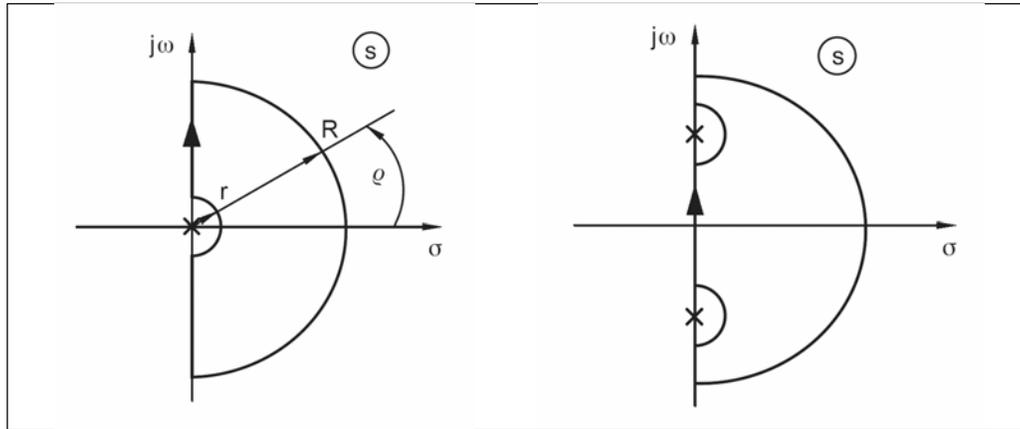


- Sprungantworten der geschlossenen Kreise
 - Stabilität für $K = 1.2$

Polstellenlage des geschlossenen Kreises für verschiedene K



Nyquist-Kriterium für grenzstabile offene Kreise



Quelle: Schumacher/Leonhard, Grundlagen der Regelungstechnik

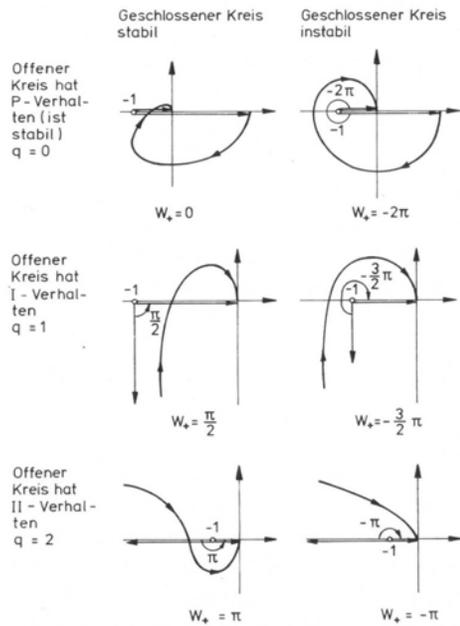
- Pole auf der reellen Achse werden umgangen mit $r \rightarrow 0$

– Ohne Beweis: Stabilität für

$$l_p \cdot \pi + l_a \cdot \frac{\pi}{2} = \Delta\varphi$$

- l_a : Anzahl der Pole auf der imaginären Achse

Nyquist-Kriterium für (grenz)stabile offene Kreise



Für (grenz)stabile offene Kreise gilt:
Der Punkt -1 muss „links“ der Ortskurve des offenen Kreises liegen

Exakte Bedingung für die Phasendrehung:

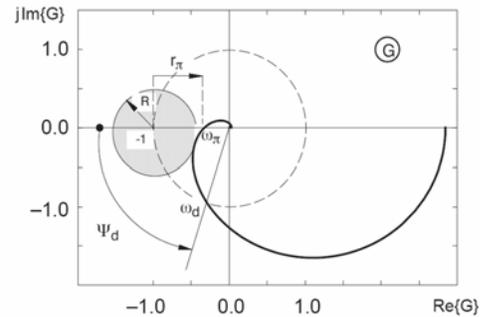
$$l_p \cdot \pi + l_a \cdot \frac{\pi}{2} = \Delta\varphi$$

- l_p : Instabile Pole des offenen Kreises
- l_a : Grenzstabile Pole des offenen Kreises

Quelle: Föllinger, Regelungstechnik

Betrags- und Phasenabstand

- Maße für die Robustheit der Regelung
 - Gegen Parametervariationen (Modellfehler!)
 - Hinreichende Dämpfung von Störungen
 - „Wie weit ist es bis zur Instabilität?“



Quelle: Schumacher/Leonhard, Grdl. der Regelungstechnik

- r_π : Betragsabstand
- ω_π : Phasendurchtrittsfrequenz
- ψ_d : Phasenabstand
- ω_d : Amplitudendurchtrittsfrequenz

$$\arg\{G_o(j\omega_\pi)\} = -\pi$$

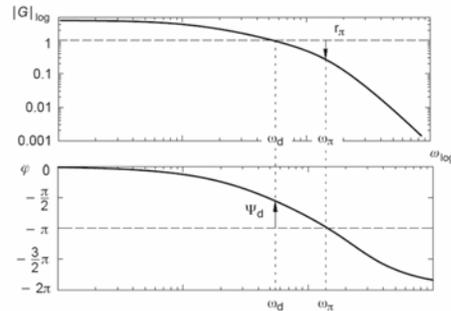
$$r_\pi = 1 + G_o(j\omega)$$

$$|G_o(j\omega_d)| = 1$$

$$\psi_d = \pi + \varphi_k(\omega_d)$$

Betrags- und Phasenabstand im Bode-Diagramm

- Bodediagramm und Ortskurve tragen dieselbe Information



Quelle: Schumacher/Leonhard, Grdl. der Regelungstechnik

- r_π : Betragsabstand
- ω_π : Phasendurchtrittsfrequenz
- ψ_d : Phasenabstand
- ω_d : Amplitudendurchtrittsfrequenz

$$\arg\{G_o(j\omega_\pi)\} = -\pi$$

$$r_\pi = 1 + G_o(j\omega)$$

$$|G_o(j\omega_d)| = 1$$

$$\psi_d = \pi + \varphi_k(\omega_d)$$