

# **Vorlesung: Einführung in die Robotik**

**Prof. J. Zhang**

zhang@informatik.uni-hamburg.de

**Universität Hamburg**

Fachbereich Informatik

AB Technische Aspekte Multimodaler Systeme

16. Dezember 2004

# Inhaltsverzeichnis

|                                                         |      |
|---------------------------------------------------------|------|
| 6. Dynamik . . . . .                                    | 355  |
| Probleme der Dynamik von Manipulatoren . . . . .        | .355 |
| Beispiel für einen zweigelenkigen Manipulator . . . . . | .357 |
| Lagrange'sche Gleichungen . . . . .                     | .361 |
| Allgemeine dynamische Gleichungen . . . . .             | .367 |

# Probleme der Dynamik von Manipulatoren

## ● Vorwärtsdynamik:

- ❖ *Vorgabe:* Gelenkkräfte/-momente;
- ❖ *Gesuchte:* Bewegungsparameter;
- ❖ *Anwendung:* Simulation eines Robotermodells.

## ● Inverse Dynamik:

- ❖ *Vorgabe:* gewünschte Roboterbewegung;
- ❖ *Gesuchte:* erforderliche Gelenkkräfte/-momente;
- ❖ *Anwendung:* Modell-basierte Regelung eines Roboters.

## Zwei Berechnungsverfahren:

- Analytische Methoden:  
aufgebaut auf Lagrange'schen Gleichungen
- Synthetische Methoden:  
Anwendung der Newton-Euler'schen Gleichungen

Ein Problem mit der Rechnerzeit:

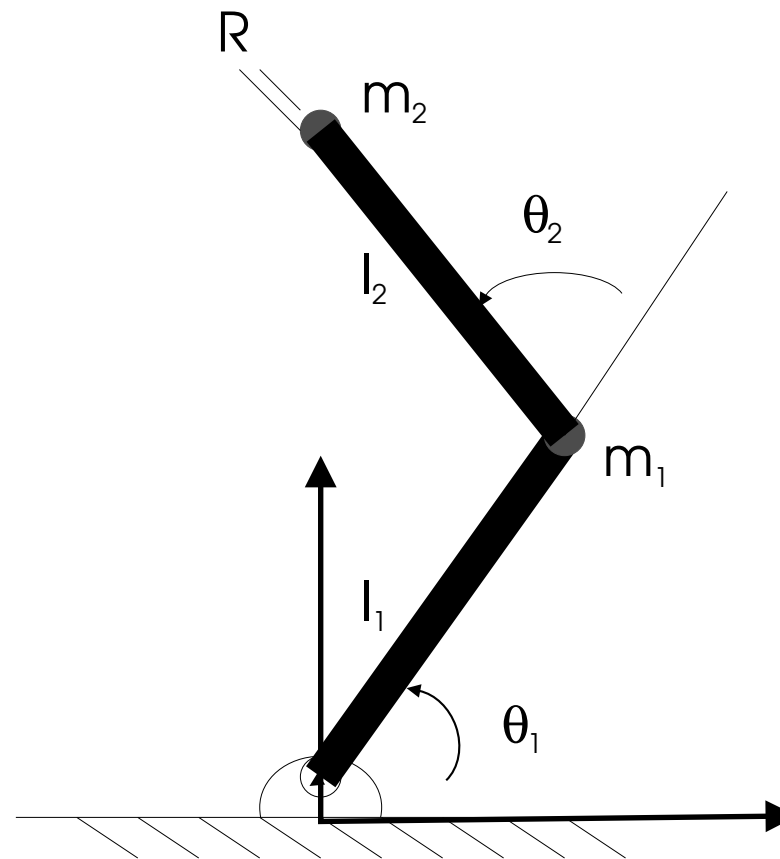
Komplexität zur Auswertung des Lagrange-Euler-Modells (siehe die kommenden Seiten):

$O(n^4)$  wobei  $n$  die Anzahl der Gelenke ist.

$n = 6$ :

66,271 Multiplikationen und 51,548 Additionen.

# Beispiel für einen zweigelenkigen Manipulator



# Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - I

nach dem Newton's zweiten Gesetz

sind die Kräfte an dem Schwerpunkt des Glieder 1 und 2 jeweils:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$$

wobei

$$\mathbf{r}_1 = 1/2l_1(\cos \theta_1 \vec{i} + \sin \theta_1 \vec{j})$$

$$\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}_1 + 1/2l_2[\cos(\theta_1 + \theta_2)\vec{i} + \sin(\theta_1 + \theta_2)\vec{j}]$$

Euler'sche Gleichungen:

$$\tau_1 = \mathbf{I}_1 \dot{\omega}_1 + \omega_1 \times \mathbf{I}_1 \dot{\omega}_1$$

$$\tau_2 = \mathbf{I}_2 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \times \mathbf{I}_2 \dot{\omega}_2$$

wobei

$$I_1 = m_1 l_1^2 / 12 + m_1 R^2 / 4$$

$$I_2 = m_2 l_2^2 / 12 + m_2 R^2 / 4$$

# Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - II

Die Winkelgeschwindigkeiten und -Beschleunigungen sind:

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$$

$$\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1$$

$$\dot{\omega}_2 = \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2$$

Da  $\omega_i \times \mathbf{I}_i \omega_i = 0$ , gilt es dann für die Kraftmomente an dem Schwerpunkt des Glieder 1 und 2:

$$\tau_1 = I_1 \ddot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

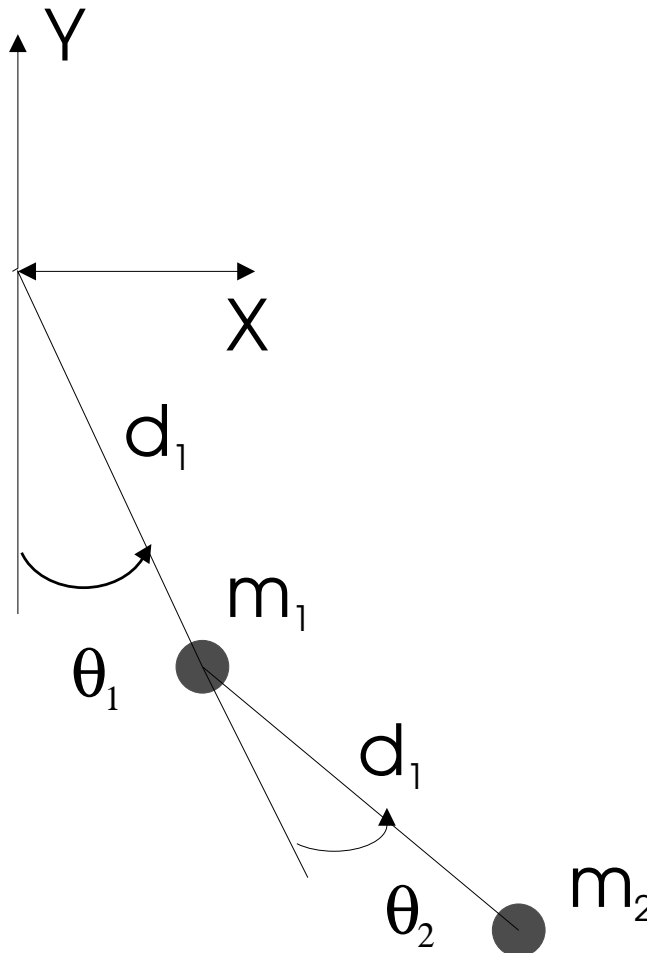
$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \tau_1, \tau_2$  werden für die Kraft- und Kraftmoment-Balance verwendet.  
Dadurch werden die Kraftmomente direkt an Gelenk 1 und 2 gelöst.



$\dot{q}_i$ : die entsprechende Geschwindigkeit;

$F_i$ : die entsprechende Kraft oder das entsprechende Kraftmoment,  
abhängig davon, ob  $q_i$  ein linearer oder Winkel-Geschwindigkeit ist.

## Besipiel 2 für einen zweigelenkigen Manipulator



# Langrange'sche Verfahren für das Beispiel - I

Die kinetische Energie des Masses  $m_1$  ist:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

Die potentielle Energie ist:

$$P_1 = -m_1 g d_1 \cos(\theta_1)$$

Die kartesischen Positionen sind:

$$x_2 = d_1 \sin(\theta_1) + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = -d_1 \cos(\theta_1) - d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

## Langrange'sche Verfahren für das Beispiel - II

Die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeiten sind:

$$\dot{x}_2 = d_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = d_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

Das Quadrat der Geschwindigkeitsgröße ist:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

Die kinetische Energie des 2. Gelenks ist:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Die potentielle Energie des 2. Gelenks ist:

$$P_2 = -m_2 g d_1 \cos(\theta_1) - m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

## Langrange'sche Verfahren für das Beispiel - III

Die Langrange'sche Funktion ist:

$$L = (K_1 + K_2) - (P_1 + P_2)$$

Das Kraftmoment auf Gelenk 1 bzw. 2 ist jeweils:

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$D_{ijj}$ : die Koeffizienten der zentripetalen Kraft auf Gelenk  $i$  wegen der Geschwindigkeit des Gelenk  $j$ ;

$D_{iik}(D_{iki})$ : die Koeffizienten der Coriolis-Kraft auf Gelenk  $i$  wegen der Geschwindigkeiten des Gelenk  $i$  und  $k$ ;

$D_i$ : die Schwerkraft auf Gelenk  $i$ .

Ein Term wie  $D_{111}\dot{\theta}_1^2$  wird von einer zentrifugalen Kraft verursacht;

Ein Term wie  $D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$  wird von einer Coriolis-Kraft verursacht und beinhaltet immer das Produkt der beiden Geschwindigkeiten.

$G(\Theta)$ : der Schwerkraft-Term, hängt immer von  $\Theta$  ab.

Für das obige Beispiel:

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$