Vorlesung: Einführung in die Robotik

Prof. J. Zhang
zhang@informatik.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Fachbereich Informatik
AB Technische Aspekte Multimodaler Systeme

16. Dezember 2004

Probleme der Dynamik von Manipulatoren

- **Vorwärtsdynamik:**
  - *Vorgabe*: Gelenkkräfte/-momente;
  - *Gesuchte*: Bewegungsparameter;
  - *Anwendung*: Simulation eines Robotermodells.
- **Inverse Dynamik**:
  - *Vorgabe*: gewünschte Roboterbewegung;
  - *Gesuchte*: erforderliche Gelenkkräfte/-momente;
  - *Anwendung*: Modell-basierte Regelung eines Roboters.

Inhaltsverzeichnis

Zwei Berechnungsverfahren:

- Analytische Methoden:
  aufgebaut auf Lagrange'schen Gleichungen
- Synthetische Methoden:
  Anwendung der Newton-Euler'schen Gleichungen

Ein Problem mit der Rechnezeit:

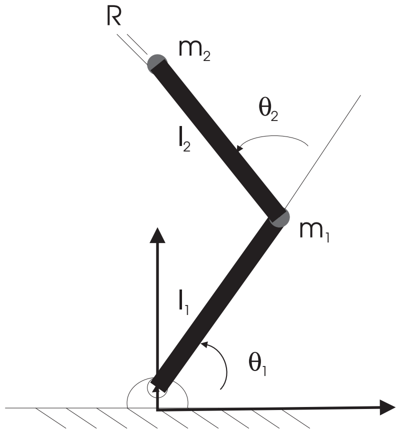
Komplexität zur Auswertung des Lagrange-Euler-Modells (siehe die kommenden Seiten):

$O(n^4)$ wobei n die Anzahl der Gelenke ist.

$n = 6$:

66,271 Multiplikationen und 51,548 Additionen.

Beispiel für einen zweigelenkigen Manipulator



Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - I

ach dem Newton's zweiten Gesetz

sind die Kräfte an dem Schwerpunkt des Glieder 1 und 2 jeweils:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$$

wobei

$$\mathbf{r}_1 = 1/2 l_1 (\cos\theta_1 \vec{i} + \sin\theta_1 \vec{j})$$

$$\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}_1 + 1/2 l_2 [\cos(\theta_1+\theta_2)\vec{i} + \sin(\theta_1+\theta_2)\vec{j}]$$

Euler'sche Gleichungen:

$$\tau_1 = \mathbf{I}_1 \dot{\omega}_1 + \omega_1 \times \mathbf{I}_1 \dot{\omega}_1$$

$$\tau_2 = \mathbf{I}_2 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \times \mathbf{I}_2 \dot{\omega}_2$$

wobei

$$I_1 = m_1 {l_1}^2/12 + m_1 R^2/4$$
$$I_2 = m_2 {l_2}^2/12 + m_2 R^2/4$$

Newton-Euler'sche Gleichungen für das Beispiel - II

Die Winkelgeschwindigkeiten und -Beschleunigungen sind:

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1$$
$$\omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$$
$$\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1$$
$$\dot{\omega}_2 = \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2$$

Da $\omega_i \times \mathbf{I}_i \omega_i = 0$, gilt es dann für die Kraftmomente an dem Schwerpunkt des Glieder 1 und 2:

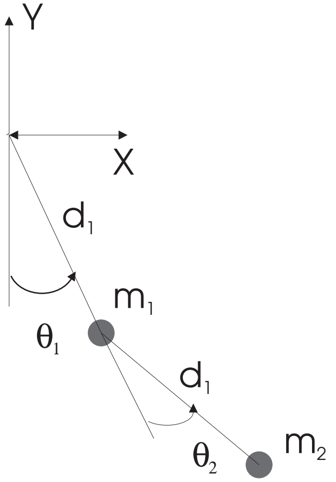
$$\tau_1 = I_1 \ddot{\theta}_1$$
$$\tau_2 = I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \tau_1, \tau_2$ werden für die Kraft- und Kraftmoment-Balance verwendet.
Dadurch werden die Kraftmomente direkt an Gelenk 1 und 2 gelöst.

$\dot{q}_i$: die entsprechende Geschwindigkeit;

F_i: die entsprechende Kraft oder das entsprechende Kraftmoment, abhängig davon, ob q_i ein linearer oder Winkel-Geschwindigkeit ist.

Besipiel 2 für einen zweigelenkigen Manipulator



Langrage'sche Verfahren für das Beispiel - I

Die kinetische Energie des Masses m_1 ist:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 {d_1}^2 {\dot{\theta}_1}^2$$

Die potentielle Energie ist:

$$P_1 = -m_1 g d_1 cos(\theta_1)$$

Die kartesischen Positionen sind:

$$x_2 = d_1 sin(\theta_1) + d_2 sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = -d_1 cos(\theta_1) - d_2 cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Langrage'sche Verfahren für das Beispiel - II

Die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeiten sind:

$$\dot{x}_2 = d_1 cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 + d_2 cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = d_1 sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 + d_2 sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

Das Quadrat der Geschwindigkeitsgröße ist:

$${v_2}^2 = {\dot{x}_2}^2 + {\dot{y}_2}^2$$

Die kinetische Energie des 2. Gelenks ist:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2$$

Die potentielle Energie des 2. Gelenks ist:

$$P_2 = -m_2 g d_1 cos(\theta_1) - m_2 g d_2 cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Langrage'sche Verfahren für das Beispiel - III

Die Langrange'sche Funktion ist:

$$L = (K_1 + K_2) - (P_1 + P_2)$$

Das Kraftmoment auf Gelenk 1 bzw. 2 ist jeweils:

$$\tau_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

D_{ijj}: die Koeffizienten der zentripetalen Kraft auf Gelenk i wegen der Geschwindigkeit des Gelenk j;

$D_{iik}(D_{iki})$: die Koeffizienten der Coriolis-Kraft auf Gelenk i wegen der Geschwindigkeiten des Gelenk i und k;

D_i: die Schwerkraft auf Gelenk i.

Ein Term wie $D_{111}\dot{\theta}_1^2$ wird von einer zentrifugalen Kraft verursacht;

Ein Term wie $D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ wird von einer Coriolis-Kraft verursacht und beinhaltet immer das Produkt der beiden Geschwindigkeiten.

$G(\Theta)$: der Schwerkraft-Term, hängt immer von Θ ab.

Für das obige Beispiel:

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$