Vorlesung: Einführung in die Robotik

Prof. J. Zhang
zhang@informatik.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Fachbereich Informatik
AB Technische Aspekte Multimodaler Systeme

9. Dezember 2004

Inhaltsverzeichnis

Interpolation vs. Approximation

Approximation:

Annährung von Daten bzw. Kurven durch andere Kurven. Ein Beispiel ist die Interpolation.

siehe eine Demo:

http://www.oslo.sintef.no/NAM/people/xic/spline_demo/

Wenn eine Kurve exakt durch alle Daten durchläuft − > Interpolation

Man approximiert wenn sehr viele Meßdaten vorligen.

Interpolationsverfahren

Generierung von Robotertrajektorien im Gelenkwinkelraum über mehrere Zwischenziele benötigt geeignete Interpolationsverfahren.

Einige Interpolationsverfahren mit Polynomen:

- Langrange-Polynome (s. ein Beispiel unter http://www.math.ucla.edu/ baker/java/hoefer/TwoDemos.htm),
- Newton-Polynome,
- Bernstein-Ploynome,
- Basis-Splines (s. ein das gleiche Beispiel unter http://www.math.ucla.edu/ baker/java/hoefer/TwoDemos.htm).

Bernstein-Polynome: I

Definition:

Die Bernstein-Polynome der Ordnung $k+1$ werden wie folgt definiert:

$$B_{i,k}(t) = \binom{k}{i}(1-t)^{k-i}t^i, \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

Interpolation mit $B_{i,k}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}_0 B_{0,k}(t) + \mathbf{b}_1 B_{1,k}(t) + \cdots + \mathbf{b}_k B_{k,k}(t)$$

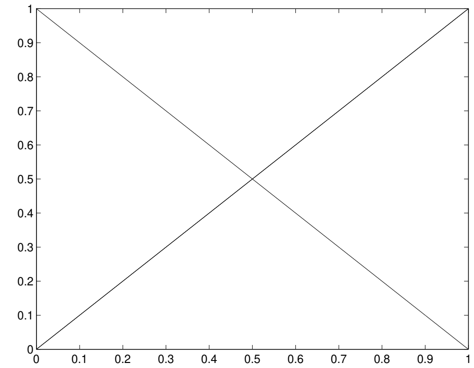
Die Eigenschaften der Bernstein-Polynome:

- "partition of unity": $\sum_{i=0}^{k} B_{i,k}(t) \equiv 1$,
- "positivity": $B_{i,k}(t) \geq 0$ für $t \in [0,1]$,

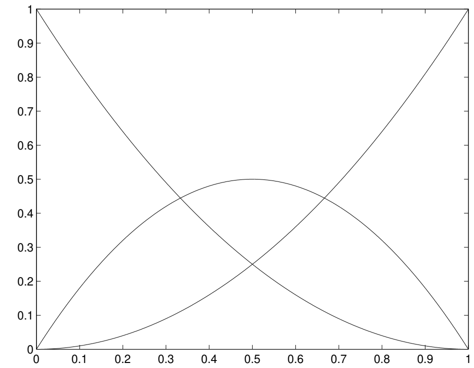
- "recursion":
  $B_{i,k}(t) = (1-t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)$.

Bernstein-Polynome: II

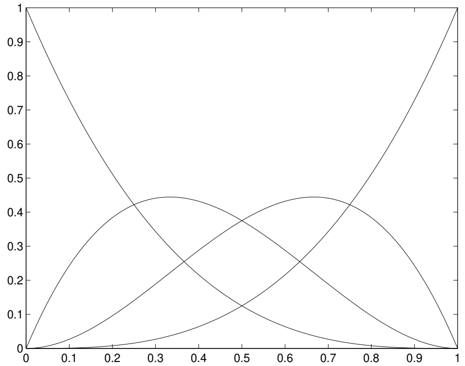
Ordung 2:



Ordung 3:



Ordung 4:



B-Spline-Kurve und -Basisfunktionen

Eine **B-Spline-Kurve** der Ordnung k ist ein stückweise aus **B-Splines (Basisfunktion)** zusammengesetztes Polynom vom Grad $(k-1)$, das an den Segmentübergängen im allgemeinen C^{k-2} stetig differenzierbar ist.

Dabei seien B-Splines Stückweise Polynome, denen die folgenden geordneten Parameterwerte zugrundeliegen:

$$\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_{m+k}),$$

wobei

- m: wird von der Anzahl der zu interpolierenden Punkte bestimmt
- k: die festgelegte Ordnung der B-Spline-Kurve

Definition der B-Splines

Als normalisierte B-Splines $N_{i,k}$ der Ordnung k (vom Grad $k-1$) werden folgende Funktionen bezeichnet:

Für $k = 1$,

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & : \text{ für } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

sowie für $k > 1$, eine rekursive Darstellung:

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

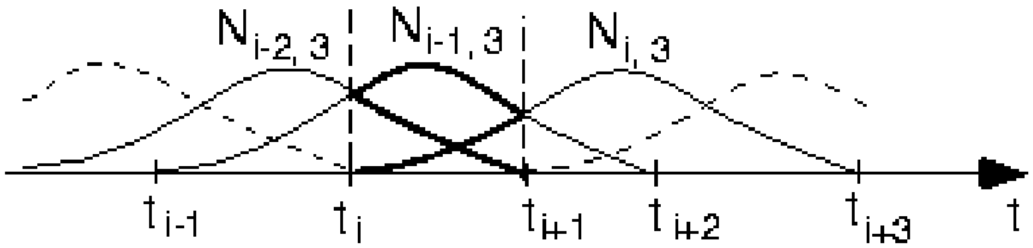
mit $i = 0, \ldots, m$.

Beispiele von B-Splines

B-Splines der Ordnung 1, 2, 3 und 4:

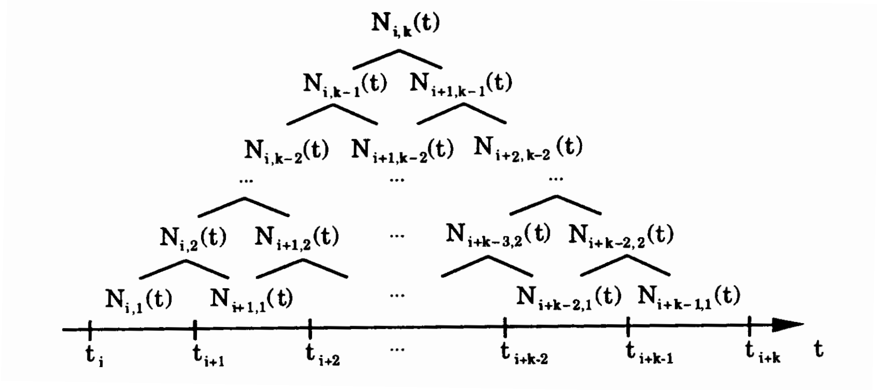
Innerhalb eines Parameterintervals gibt es k sich überlappende B-Splines.

Ein Beispiel der kubischen B-Splines:

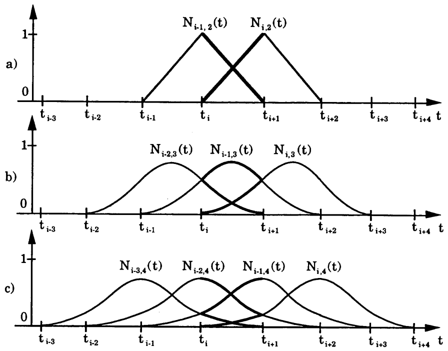


B-Splines der Ordnung k

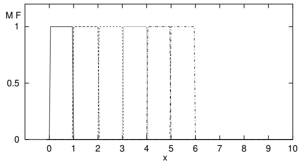
Das rekursive Definitionsverfahren einer B-Spline-Basisfunktion $N_{i,k}(t)$:



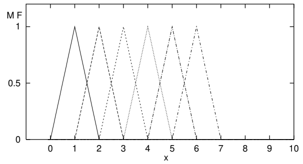
Aktuelle Segemente der B-Spline-Basisfunktionen der Ordnungen 2, 3 und 4 für $t_i \leq t < t_{i+1}$:



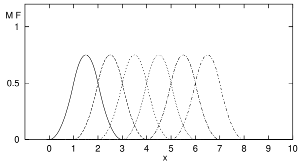
Uniforme B-Splines der Ordnung 1 bis 4



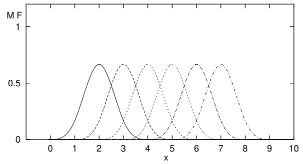
k=1



k=2



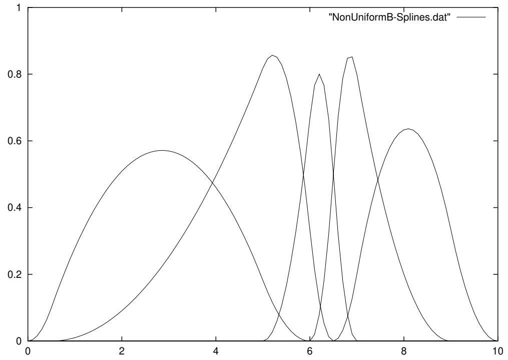
k=3



k=4

Nichtuniforme B-Splines

Ordnung 3:



Eigenschaften der B-Splines

Partition of unity:

$\sum_{i=0}^{k} N_{i,k}(t) = 1.$

Positivity:

$N_{i,k}(t) \geq 0.$

Local support:

$N_{i,k}(t) = 0$ for $t \notin [t_i, t_{i+k}]$.

C^{k-2} *continuity:*

If the knots $\{t_i\}$ are pairwise different from each other, then $N_{i,k}(t) \in C^{k-2}$, i.e. $N_{i,k}(t)$ is $(k-2)$ times continuously differentiable.

Gewinnung einer B-Spline-Kurve

Eine B-Spline-Kurve kann dadurch konstruiert werden, daß eine Menge von vorgegebenen Größen mit diesen B-Splines gemischt werden:

$$\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{m}} \mathbf{v}_{\mathrm{j}} \cdot \mathrm{N}_{\mathrm{j,k}}(\mathrm{t})$$

wobei $\mathbf{v}_j$ *Kontrollpunkte* (*de Boor-Punkte*) genannt werden.

Sei ein Parameter t gegeben, ist $\mathbf{r}(t)$ ein Punkt dieser B-Spline-Kurve.

Wenn t von t_{k-1} bis zu t_{m+1} variiert, so stellt $\mathbf{r}(\mathrm{t})$ eine C^{k-2} stetig differenzierbare Kurve dar.

Berechnung von Kontrollpunkten aus Datenpunkten

Die Punkte $\mathbf{v}_j$ sind nur bei $k = 2$ identisch mit den Datenpunkten zur Interpolation, sonst nicht.

Ein Kontrollpunktzug bildet eine konvexe Hülle für die Interpolationskurve.

Zwei Verfahren zur Berechnung von Kontrollpunkten aus Datenpunkten:

1 Durch die Lösung des folgenden Gleichungssytems (**Böhm84**):

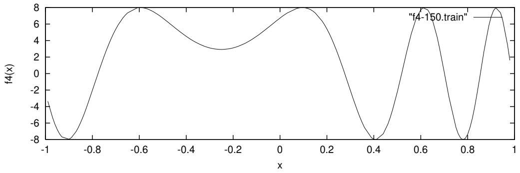
$$\mathbf{q}_j(t) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{v}_j \cdot N_{j,k}(t)$$

wobei $\mathbf{q}_j$ die Datenpunkte für die Interpolation sind, $j = 0, \cdots, m$.

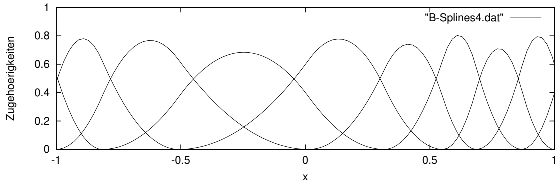
2 Durch Lernen basierend auf dem Gradient-Abstieg (**Zhang98**).

Funktionsapproximation - 1D Beispiel

Eine Testfunktion $f_4(x) = 8sin(10x^2 + 5x + 1)$ mit $-1 < x < 1$:

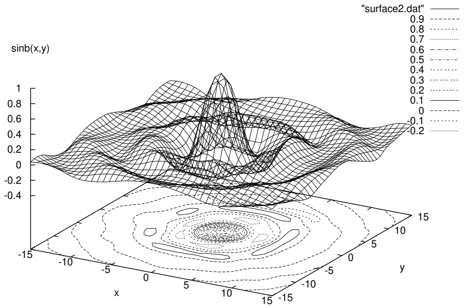


Die richtig verteilten B-Splines:

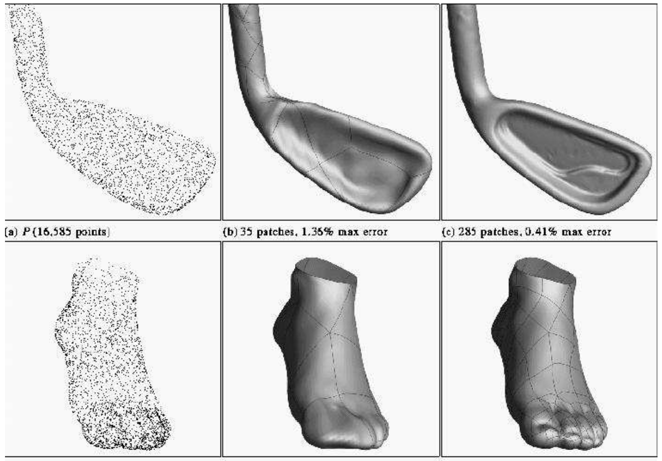


Funktionsapproximation - 2D Beispiel

Approximation der Funktion $sinb(x, y) = sin(\sqrt{x^2 + y^2}/\sqrt{x^2 + y^2})$

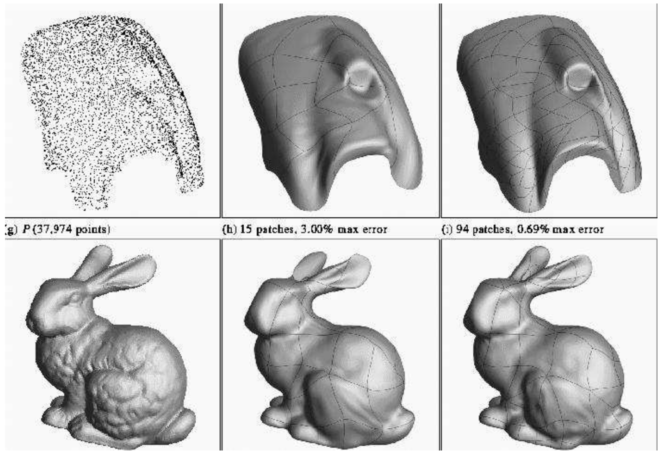


Modellierung mit B-Splines – Beispiele mit 3D Objekte



(a) P (16,585 points) (b) 35 patches, 1.36% max error (c) 285 patches, 0.41% max error

(d) P (20,021 points) (e) 29 patches, 1.20% max error (f) 156 patches, 0.27% max error



(g) P (37,974 points) (h) 15 patches, 3.00% max error (i) 94 patches, 0.69% max error