Vorlesung: Einführung in die Robotik

Prof. J. Zhang
zhang@informatik.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Fachbereich Informatik
AB Technische Aspekte Multimodaler Systeme

28. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

Koordinaten eines Manipulator

- Gelenk-Koordinaten:
  Ein Vektor $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t))^T$
  (eine Roboter-Konfiguration)
- Endeffektor-Koordinaten
  (Objekt-Koordinaten):
  Ein Vektor $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$
- Beschreibung der Orientierungen:
  - Euler-Winkel ϕ, θ, ψ
  - Drehmatrix:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Warum Koordinaten-Transformation (1)

- **Das direkte kinematische Problem**:
  Wenn die Gelenkwerte und die geometrischen Parameter aller Gelenke eines Manipulators gegeben sind, wie können die Position und Orientierung des Manipulator-Endeffektors bestimmt werden?
- **Das inverse kinematische Problem**:
  Seien sowohl eine gewünschte Position als auch Orientierung des Manipulator-Endeffektors und die geometrischen Parameter aller Gelenke gegeben, kann der Manipulator diese Position / Orientierung erreichen? Und wenn ja, wie viele Manipulator-Konfigurationen können diese Konditionen erfüllen?

  (*Ein Beispiel*: Ein sich auf einer Ebene bewegender Zwei-Gelenk-Manipulator)

Warum Koordinaten-Transformation (2)

- **Überführung von Frames**:
  Frame: ein Bezugskoordinatensystem
  Typische Frames:
  - Roboterbasis
  - Endeffektor
  - Tisch (Welt)
  - Objekt
  - Kamera
  - Bildschirm
  - ...

  Frame-Transformationen führen einen Frame in einen anderen über.

Homogene Transformation

Eine Raum-Transformation H ist eine 4×4 Matrix, die translatorische, rotatorische und perspektivische Transformationen darstellen kann.

- Translationsvektor:
  T: ein 3×1 Vektor

$$T = [p_x,\ p_y,\ p_z]^T$$

- Rotationsmatrizen:
  R: ein 3×3 Matrix durch belibige Verknüpfung der Drehmatrizen um die x-, y-, z-Achse

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Homogene Transformationsmatrizen:

$$H = \begin{bmatrix} R & T \\ P & S \end{bmatrix}$$

  wobei P die perspektivische Transformation und S die Skalierung beschreibt.

Translatorische Transformation

Eine Translation mit einem Vektor $[p_x, p_y, p_z]^T$ wird von einer Transformation H dargestellt:

$$H = T_{(p_x, p_y, p_z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotatorische Transformation

(verkürzte Schreibweise: $S : \sin$, $C : \cos$)

Die zur Drehung um die x-Achse mit einem Winkel ψ zugehörige Transformation:

$$R_{x,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die zur Drehung um die y-Achse mit einem Winkel θ zugehörige Transformation:

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die zur Drehung um die z-Achse mit einem Winkel ϕ zugehörige Transformation:

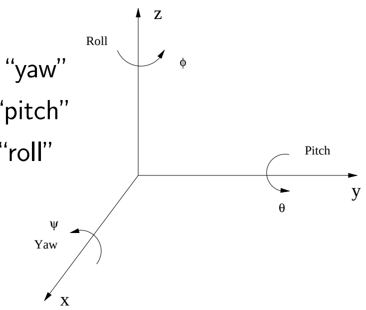
$$R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bei mehreren Drehungen

Sequentielle Linksmultiplikationen der Transformationsmatrizen nach der Reihenfolge der Drehungen.

Ein Beispiel:

1. Eine Drehung ψ um die x-Achse $R_{x,\psi}$ - "yaw"
2. Eine Drehung θ um die y-Achse $R_{y,\theta}$ - "pitch"
3. Eine Drehung ϕ um die z-Achse $R_{z,\phi}$ - "roll"



Verknüpfung der Drehmatrizen

$$R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi & 0 \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$AB \neq BA$$

Koordinaten-Frames

Sie werden über die Elemente der homogenen Transformation als vier Vektoren dargestellt.

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Inverse Transformationen

Die Inverse einer Drehmatrix ist einfach ihre Transponierte:

$$R^{-1} = R^T \text{ und } RR^T = I$$

wobei I die Identitätsmatrix ist.

Die Inverse von (1) ist:

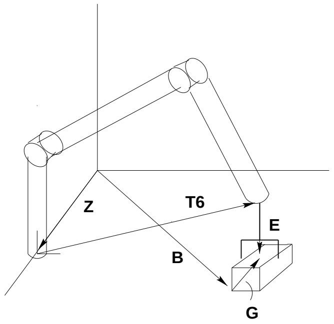
$$H^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_1 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_2 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ und $\mathbf{p}$ die vier Spaltenvektoren von (1) sind und $\cdot$ das Skalarprodukt von Vektoren darstellt.

Relativtransformationen

Man hat die folgenden Transformationen:

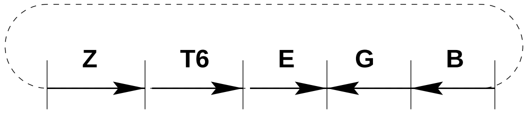
- Z: Welt $\longrightarrow$ Manipulator-Basis
- T_6: Manipulator-Basis $\longrightarrow$ Manipulator-Ende
- E: Manipulator-Ende $\longrightarrow$ Endeffektor
- B: Welt $\longrightarrow$ Objekt
- G: Objekt $\longrightarrow$ Endeffektor



Gleichung der Transformation

Es gibt zwei Beschreibungen der Position des Endeffektors, eine in Bezug auf das Objekt und die andere auf den Manipulator. Sie beschreiben die gleiche Sache:

$$ZT_6E = BG$$



Um die Manipulator-Transformation zu finden:

$$T_6 = Z^{-1}BGE^{-1}$$

Um die Position des Objekts zu bestimmen:

$$B = ZT_6EG^{-1}$$

Dies wird auch als kinematische Kette bezeichnet.

Zusammenfassung der homogenen Transformationen

- Eine homogene Transformation beschreibt die Position und Orientierung eines Koordinaten-Frames im Raum.
- Wenn der Koordinaten-Frame bezüglich eines Festkörpers definiert wird, ist die Position und Orientierung des Festkörpers auch eindeutig spezifiziert.
- Die Beschreibung eines Objektes A kann über eine Homogene Transformation bezüglich des Objektes B abgeleitet werden. Umgekehrt geht es auch mit der inversen Transformation.

Zusammenfassung der homogenen Transformationen

- Mehrere Translationen und Rotationen können multipliziert werden. Es gilt:
  - Wenn die Rotationen / Translationen bezüglich des aktuellen neu definierten (oder veränderten) Koordinatensystems durchgeführt werden, müssen die entsprechenden neu dazukommenden Transformationsmatrizen von rechts dran multipliziert werden.
  - Wenn sie alle bezüglich des festen Referenz-Koordinatensystems durchgeführt
    werden, müssen die Transformationsmatrizen von links dran multipliziert werden.
- Eine homogene Transformation kann in eine Rotation und in eine Translation zerlegt werden.