



64-040 Modul InfB-RSB

Rechnerstrukturen und Betriebssysteme

[https://tams.informatik.uni-hamburg.de/
lectures/2019ws/vorlesung/rsb](https://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2019ws/vorlesung/rsb)

– Kapitel 3 –

Andreas Mäder



Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik

Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2019/2020



Ziffern und Zahlen

Konzept der Zahl

Stellenwertsystem

Umrechnung zwischen verschiedenen Basen

Zahlenbereich und Präfixe

Festkommazahlen

Darstellung negativer Zahlen

Gleitkomma und IEEE 754

Maschinenworte

Literatur



„Das Messen ist der Ursprung der Zahl als Abstraktion der Anzahl von Objekten die man abzählen kann...“ [lfr10]

Abstraktion zum:

- ▶ Zählen
- ▶ Speichern
- ▶ Rechnen

Georges Ifrah
Universal-
geschichte der
Zahlen

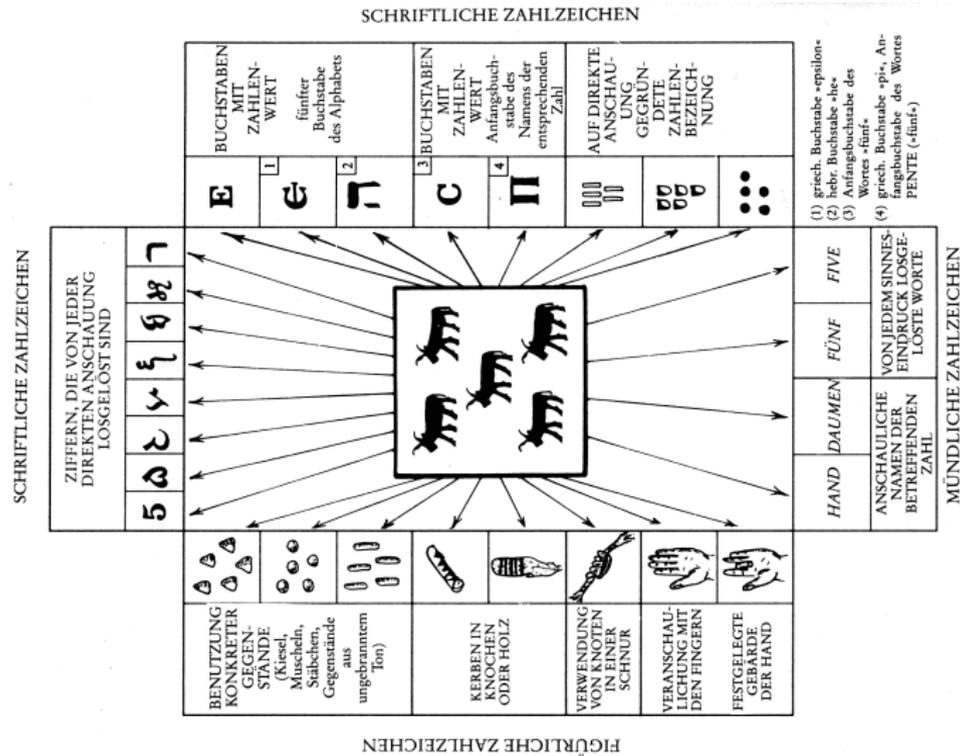


- ▶ Zahlenbereich: kleinste und größte darstellbare Zahl?
- ▶ Darstellung negativer Werte?
- ▶ –"– gebrochener Werte?
- ▶ –"– sehr großer Werte?

- ▶ Unterstützung von Rechenoperationen?
Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division etc.
- ▶ Abgeschlossenheit unter diesen Operationen?

- ▶ Methode zur dauerhaften Speicherung/Archivierung?
- ▶ Sicherheit gegen Manipulation gespeicherter Werte?

Abstraktion: Verschiedene Symbole für eine Zahl



Zählen mit den Fingern („digits“)

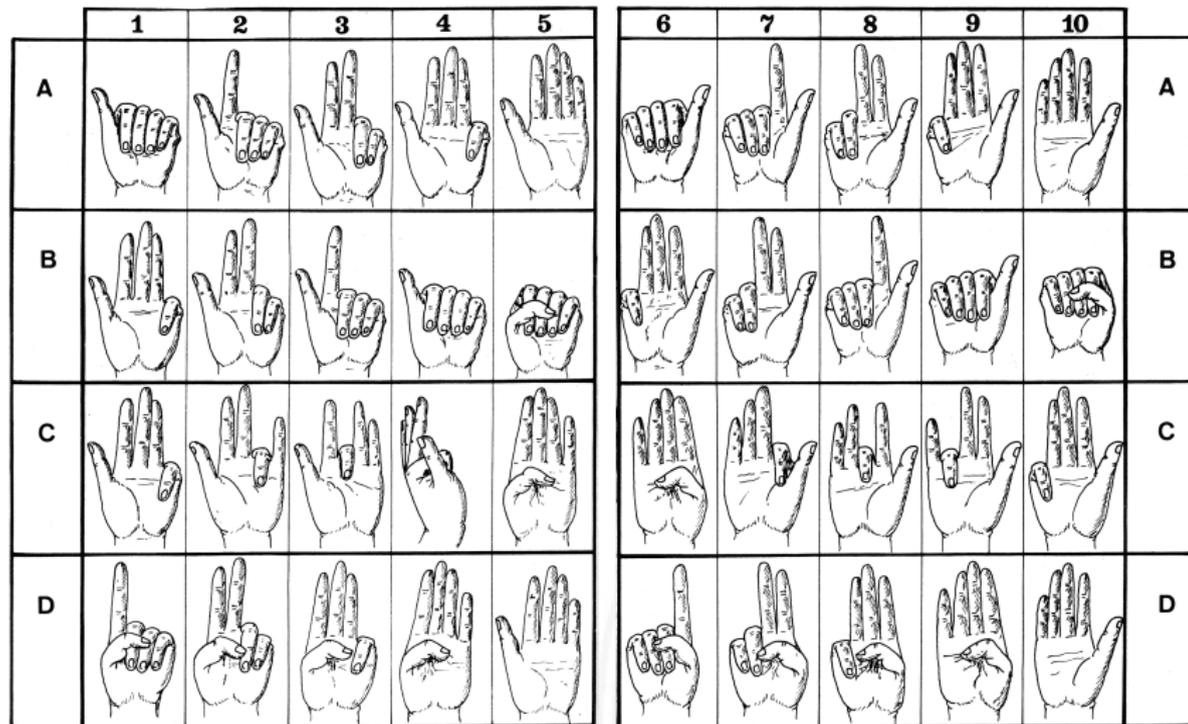


Abb. 12: Verschiedene Möglichkeiten des Zählens mit den Fingern.

[lfr10]

Tonbörse: 15. Jh. v. Chr.

Gegenstände, Hammel und Ziegen betreffend

- 21 Mutterschafe
- 6 weibliche Lämmer
- 8 erwachsene Hammel
- 4 männliche Lämmer
- 6 Mutterziegen
- 1 Bock
- (2) Jungziegen

Abb. 3: Eiförmige Tonbörse (46 mm × 62 mm × 50 mm), entdeckt in den Ruinen des Palastes von Niuzi (mesopotamische Stadt; ca. 15. Jh. v. Chr.). (Harvard Semitic Museum, Cambridge. Katalognummer SMN 1854)



Kerbhölzer



Abb. 58: Kerbhölzer aus Bäckereien in Frankreich, wie sie in kleinen Ortschaften auf dem Lande üblich waren.

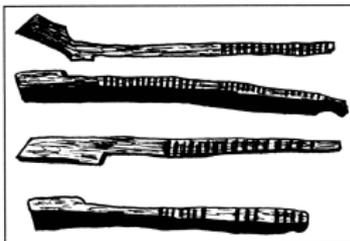


Abb. 59: Englische Kerbhölzer aus dem 13. Jahrhundert. (Sammlung of Antiquaries, London; Zeichnung nach Menninger 1957/58, II, 42)

Knotenschnüre

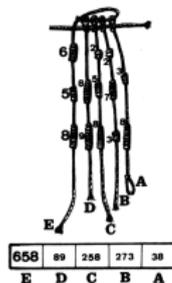


Abb. 66: Interpretation eines quipu: Die Zahl 658 auf der Schnur E ist gleich der Summe der Zahlen auf den Schnüren A, B, C und D. Dieses Bündel ist das erste an einem peruanischen quipu. (American Museum of Natural History, New York, B 8713; vgl. Le-land Locke 1923)

[Ifr10]

- ▶ Ziffern: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000
- ▶ Werte eins bis zehn: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
- ▶ Position der Ziffern ist signifikant:
 - ▶ nach Größe der Ziffernsymbole sortiert, größere stehen links
 - ▶ andernfalls Abziehen der kleineren von der größeren Ziffer
 - ▶ IV=4, VI=6, XL=40, LXX=70, CM=900
- ▶ heute noch in Gebrauch: Jahreszahlen, Seitennummern usw.
Beispiele: MDCCCXIII=1813, MMIX=2009
- keine Symbole zur Darstellung großer Zahlen
- Rechenoperationen so gut wie unmöglich

Babylon: Einführung der Null, 3 Jh. v. Chr.

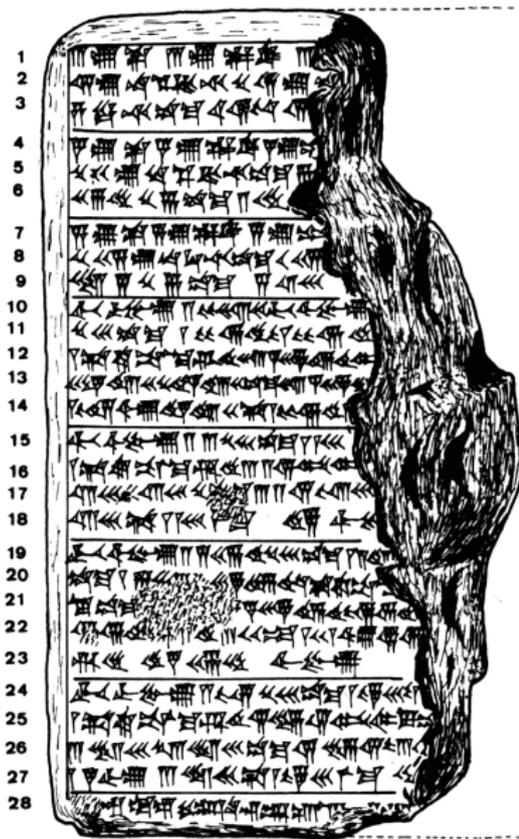
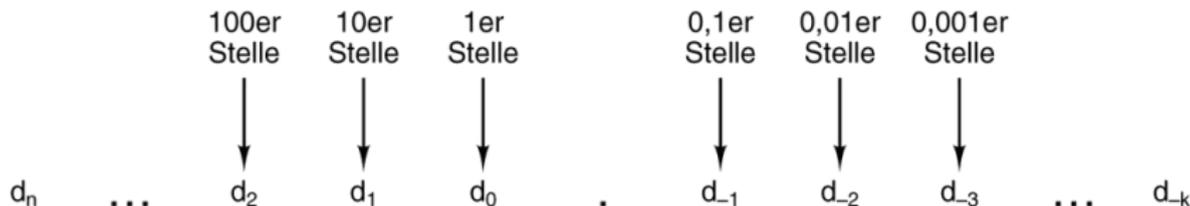


Abb. 289: Mathematische Tafel aus Uruk; sie wurde bei Schwarzgrabungen gefunden und stammt aus dem 2. oder 3. Jh. v. Chr. Es handelt sich um eines der ältesten bekannten Zeugnisse für die Verwendung der babylonischen Null.

(Musée du Louvre, Taf. AO 6484, Rückseite; Thureau-Dangin 1922, Nr. 33, Taf. 62; 1938, 76-81. Unveröffentl. Kopie d. Verf.)

[lfr10]

- ▶ vor ungefähr 4 000 Jahren, erstes **Stellenwertsystem**
- ▶ Basis 60
- ▶ zwei Symbole: | = 1 und < = 10
- ▶ Einritzen gerader und gewinkelter Striche auf Tontafeln
- ▶ Null bekannt, aber nicht mitgeschrieben
Leerzeichen zwischen zwei Stellen
- ▶ Beispiele
 - ▶ | | | | | 5
 - ▶ << | | | 23
 - ▶ | <<< 90 = 1 · 60 + 3 · 10
 - ▶ | << | 3 621 = 1 · 3 600 + 0 · 60 + 2 · 10 + 1
- ▶ für Zeitangaben und Winkелеinteilung heute noch in Gebrauch



$$\text{Zahl} = \sum_{i=-k}^n d_i \times 10^i$$

[TA14]

- ▶ das im Alltag gebräuchliche Zahlensystem
- ▶ Einer, Zehner, Hunderter, Tausender usw.
- ▶ Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw.

Stellenwertsystem („Radixdarstellung“)

- ▶ Wahl einer geeigneten Zahlenbasis b („Radix“)
 - ▶ 10: Dezimalsystem
 - ▶ 16: Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem)
 - ▶ 2: Dualsystem
- ▶ Menge der entsprechenden Ziffern $\{0, 1, \dots, b - 1\}$
- ▶ inklusive einer besonderen Ziffer für den Wert Null
- ▶ Auswahl der benötigten Anzahl n von Stellen

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

b Basis a_i Koeffizient an Stelle i

- ▶ universell verwendbar, für beliebig große Zahlen



- ▶ Stellenwertsystem zur Basis 2
- ▶ braucht für gegebene Zahl ca. dreimal mehr Stellen als Basis 10
- ▶ für Menschen daher unbequem
besser Oktal- oder Hexadezimalschreibweise, s.u.

- ▶ technisch besonders leicht zu implementieren weil nur zwei Zustände unterschieden werden müssen
z.B. zwei Spannungen, Ströme, Beleuchtungsstärken
siehe: *2.6 Informationsverarbeitung – Binärzeichen*, Folie 110

- + robust gegen Rauschen und Störungen
- + einfache und effiziente Realisierung von Arithmetik

Dualsystem: Potenztabelle

Stelle	Wert im Dualsystem	Wert im Dezimalsystem
2^0	1	1
2^1	10	2
2^2	100	4
2^3	1000	8
2^4	1 0000	16
2^5	10 0000	32
2^6	100 0000	64
2^7	1000 0000	128
2^8	1 0000 0000	256
2^9	10 0000 0000	512
2^{10}	100 0000 0000	1 024
2^{11}	1000 0000 0000	2 048
2^{12}	1 0000 0000 0000	4 096
...

- ▶ Basis 2
- ▶ Zeichensatz ist $\{0, 1\}$
- ▶ Beispiele:

$$0_2 = 0_{10}$$

$$1_2 = 1_{10}$$

$$11_2 = 3_{10} \quad 2^1 + 2^0$$

$$110100_2 = 52_{10} \quad 2^5 + 2^4 + 2^2$$

$$11111110_2 = 254_{10} \quad 2^8 + 2^7 + \dots + 2^2 + 2^1$$

- ▶ funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- ▶ Addition mehrstelliger Zahlen erfolgt stellenweise
- ▶ Additionsmatrix:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{array}$$

- ▶ Beispiel

$$\begin{array}{r} 10110011 \\ + 00111001 \\ \hline \ddot{U} \quad 11 \quad 11 \\ \hline 11101100 \end{array} \quad \begin{array}{r} = 179 \\ = 57 \\ \hline 11 \\ \hline = 236 \end{array}$$



- ▶ funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- ▶ $p = a \cdot b$ mit Multiplikator a und Multiplikand b
- ▶ Multiplikation von a mit je einer Stelle des Multiplikanten b
- ▶ Addition der Teilterme

- ▶ Multiplikationsmatrix ist sehr einfach:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$



Multiplikation im Dualsystem (cont.)

► Beispiel

$$\begin{array}{r} 10110011 \cdot 1101 = 179 \cdot 13 = 2327 \\ \hline 10110011 \quad 1 \\ 10110011 \quad 1 \\ 00000000 \quad 0 \\ 10110011 \quad 1 \\ \hline \text{Ü } 11101111 \\ \hline \hline 100100010111 \end{array}$$

- ▶ Basis 8
- ▶ Zeichensatz ist $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ▶ C-Schreibweise mit führender 0 als Präfix:
 - ▶ $0001 = 1_{10}$
 - $0013 = 11_{10} = 1 \cdot 8 + 3$
 - $0375 = 253_{10} = 3 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 5$
 - usw.
- ⇒ Hinweis: führende 0 in C für Dezimalzahlen unmöglich!
- ▶ für Menschen leichter lesbar als Dualzahlen
- ▶ Umwandlung aus/vom Dualsystem durch Zusammenfassen bzw. Ausschreiben von je drei Bits:
 $00 = 000, 01 = 001, 02 = 010, 03 = 011,$
 $04 = 100, 05 = 101, 06 = 110, 07 = 111$

- ▶ Basis 16
- ▶ Zeichensatz ist $\{0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$
- ▶ C-Schreibweise mit Präfix **0x** – Klein- oder Großbuchstaben

- ▶ $0x00000001 = 1_{10}$
- ▶ $0x000000fe = 254_{10} = 15 \cdot 16 + 14$
- ▶ $0x0000ffff = 65\,535_{10} = 15 \cdot 4\,096 + 15 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 15$
- ▶ $0xcafebabe = \dots$ erstes Wort in Java Class-Dateien usw.

- ▶ viel leichter lesbar als entsprechende Dualzahl
- ▶ Umwandlung aus/vom Dualsystem durch Zusammenfassen bzw. Ausschreiben von je vier Bits:

$0x0 = 0000, 0x1 = 0001, 0x2 = 0010, \dots, 0x9 = 1001,$
 $0xA = 1010, 0xB = 1011, 0xC = 1100,$
 $0xD = 1101, 0xE = 1110, 0xF = 1111$

Beispiel: Darstellungen der Zahl 2019

Binär

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 & + 1 \cdot 2^8 & + 1 \cdot 2^7 & + 1 \cdot 2^6 & + 1 \cdot 2^5 & + 0 \cdot 2^4 & + 0 \cdot 2^3 & + 0 \cdot 2^2 & + 1 \cdot 2^1 & + 1 \cdot 2^0 \\ 1024 & + 512 & + 256 & + 128 & + 64 & + 32 & + 0 & + 0 & + 0 & + 2 & + 1 \end{array}$$

Oktal

$$\begin{array}{cccc} 3 & 7 & 4 & 3 \\ 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 \\ 1536 & + 448 & + 32 & + 3 \end{array}$$

Dezimal

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 \\ 2000 & + 0 & + 10 & + 9 \end{array}$$

Hexadezimal

$$\begin{array}{ccc} 7 & E & 3 \\ 7 \cdot 16^2 + E \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 \\ 1792 & + 224 & + 3 \end{array}$$

Umrechnung Dual-/Oktal-/Hexadezimalsystem

► Beispiele

Hexadezimal

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & & 9 & & 4 & & 8 & . & B & & 6 \\ \underbrace{\hspace{1em}} & \underbrace{\hspace{1em}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \underbrace{\hspace{1em}} & \underbrace{\hspace{1em}} \\ & 1 & & 4 & & 5 & & 1 & & 0 & . & 5 & & 5 & & 4 \end{array}$$

Binär

Oktal

Hexadezimal

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 7 & & B & & A & & 3 & . & B & & C & & 4 \\ \underbrace{\hspace{1em}} & \underbrace{\hspace{1em}} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & . & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \underbrace{\hspace{1em}} & \underbrace{\hspace{1em}} \\ & 7 & & 5 & & 6 & & 4 & & 3 & . & 5 & & 7 & & 0 & & 4 \end{array}$$

Binär

Oktal

- Gruppieren von jeweils 3 bzw. 4 Bits
- bei Festkomma vom Dezimalpunkt aus nach außen

Umrechnung zwischen verschiedenen Basen

- ▶ Menschen rechnen im Dezimalsystem
- ▶ Winkel- und Zeitangaben auch im Sexagesimalsystem
- ▶ Digitalrechner nutzen (meistens) Dualsystem

Basis: 60

- ▶ Algorithmen zur Umrechnung notwendig
- ▶ Exemplarisch Vorstellung von drei Varianten:

1. vorberechnete Potenztabellen
2. Divisionsrestverfahren
3. Horner-Schema

Vorgehensweise für Integerzahlen

- 1.a Subtraktion des größten Vielfachen einer Potenz des Zielsystems von der umzuwandelnden Zahl
– gemäß der vorberechneten Potenztabelle
- 1.b Notation dieses größten Vielfachen (im Zielsystem)
 - ▶ solange der Rest der Zahl $\neq 0$, dann Wiederhole:
- 2.a Subtraktion wiederum des größten Vielfachen vom verbliebenen Rest
- 2.b Addition dieses Vielfachen (im Zielsystem)

Potenztabellen Dual/Dezimal

Stelle ₂	Wert ₁₀
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1 024
2^{11}	2 048
2^{12}	4 096

...

Stelle ₁₀	Wert ₂
10^0	1
10^1	1010
10^2	110 0100
10^3	11 1110 1000
10^4	10 0111 0001 0000
10^5	0x1 86 A0
10^6	0xF 42 40
10^7	0x98 96 80
10^8	0x5 F5 E1 00
10^9	0x3B 9A CA 00
10^{10}	0x2 54 0B E4 00
10^{11}	0x17 48 76 E8 00
10^{12}	0xE8 D4 A5 10 00

...

- Umwandlung Dezimal- in Dualzahl

$$Z = (163)_{10}$$

163			
- 128	2^7		1000 0000
<hr/>			
35			
- 32	2^5	+	10 0000
<hr/>			
3			
- 2	2^1	+	10
<hr/>			
1			
- 1	2^0	+	1
<hr/>			
0			1010 0011

$$Z = (163)_{10} \leftrightarrow (1010\ 0011)_2$$

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1010\ 0011)_2$$

1010 0011			
– 110 0100	$1 \cdot 10^2$	100	
<hr/>			
0011 1111			
– 11 1100	$6 \cdot 10^1$	+ 60	
<hr/>			
11			
– 11	$3 \cdot 10^0$	+ 3	
<hr/>			
0		163	

$$Z = (1010\ 0011)_2 \leftrightarrow (163)_{10}$$

- ▶ Division der umzuwandelnden Zahl im Ausgangssystem durch die Basis des Zielsystems
- ▶ Erneute Division des ganzzahligen Ergebnisses (ohne Rest) durch die Basis des Zielsystems, bis kein ganzzahliger Divisionsrest mehr bleibt

▶ Beispiel

$$\begin{array}{rcll} 163 : 2 = 81 & \text{Rest } 1 & 2^0 & \\ 81 : 2 = 40 & \text{Rest } 1 & \vdots & \\ 40 : 2 = 20 & \text{Rest } 0 & & \\ 20 : 2 = 10 & \text{Rest } 0 & & \\ 10 : 2 = 5 & \text{Rest } 0 & & \\ 5 : 2 = 2 & \text{Rest } 1 & \uparrow \text{ Leserichtung} & \\ 2 : 2 = 1 & \text{Rest } 0 & \vdots & \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1 & 2^7 & \end{array}$$
$$(163)_{10} \leftrightarrow (1010\ 0011)_2$$

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1010\ 0011)_2$$

$$(1010\ 0011)_2 : (1010)_2 = 1\ 0000 \quad \text{Rest } (11)_2 \hat{=} 3 \quad 10^0$$

$$(1\ 0000)_2 : (1010)_2 = \quad 1 \quad \text{Rest } (110)_2 \hat{=} 6 \quad 10^1$$

$$(1)_2 : (1010)_2 = \quad 0 \quad \text{Rest } (1)_2 \hat{=} 1 \quad 10^2$$

$$Z = (1010\ 0011)_2 \leftrightarrow (163)_{10}$$

Hinweis: Division in Basis b folgt

Divisionsrestverfahren: Beispiel (cont.)

- ▶ Umwandlung Dezimal- in Dualzahl

$$Z = (1492)_{10}$$

1492	:	2	=	746	Rest 0	2^0
746	:	2	=	373	Rest 0	:
373	:	2	=	186	Rest 1	
186	:	2	=	93	Rest 0	
93	:	2	=	46	Rest 1	
46	:	2	=	23	Rest 0	
23	:	2	=	11	Rest 1	
11	:	2	=	5	Rest 1	
5	:	2	=	2	Rest 1	↑ Leserichtung
2	:	2	=	1	Rest 0	:
1	:	2	=	0	Rest 1	2^{10}

$$Z = (1492)_{10} \leftrightarrow (101\ 1101\ 0100)_2$$

Divisionsrestverfahren: Algorithmus

Algorithmus

rechentechisch

darzustellende Zahl x

123

Basis q

2

a := x

while a > 0

 y_n := a mod q

 a := a div q

end

n = 1

a = 123

(a > 0) = 1

a mod 2 = 1

a div 2 = 61

000000000000000001

Resultat

Takt

K. von der Heide [Hei05]
Interaktives Skript T1
stellen2stellen



- ▶ Darstellung einer Potenzsumme durch ineinander verschachtelte Faktoren

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i = (\dots((a_{n-1} \cdot b + a_{n-2}) \cdot b + a_{n-3}) \cdot b + \dots + a_1) \cdot b + a_0$$

Vorgehensweise:

- ▶ Darstellung der umzuwandelnden Zahl im Horner-Schema
- ▶ Durchführung der auftretenden Multiplikationen und Additionen im Zielsystem

► Umwandlung Dezimal- in Dualzahl

1. Darstellung als Potenzsumme

$$Z = (163)_{10} = (1 \cdot 10 + 6) \cdot 10 + 3$$

2. Faktoren und Summanden im Zielzahlensystem

$$(10)_{10} \leftrightarrow (1010)_2$$

$$(6)_{10} \leftrightarrow (110)_2$$

$$(3)_{10} \leftrightarrow (11)_2$$

$$(1)_{10} \leftrightarrow (1)_2$$

3. Arithmetische Operationen

$$1 \cdot 1010 = 1010$$

$$+ \quad 110$$

$$\hline 10000 \cdot 1010 = 10100000$$

$$+ \quad \quad \quad 11$$

$$\hline 10100011$$

► Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

1. Darstellung als Potenzsumme

$$Z = (10100011)_2 =$$

$$(((((((1 \cdot 10_2 + 0) \cdot 10_2 + 1) \cdot 10_2 + 0) \cdot 10_2 + 0) \cdot 10_2 + 0) \cdot 10_2 + 0) \cdot 10_2 + 1) \cdot 10_2 + 1$$

2. Faktoren und Summanden im Zielzahlensystem

$$(10)_2 \leftrightarrow (2)_{10}$$

$$(1)_2 \leftrightarrow (1)_{10}$$

$$(0)_2 \leftrightarrow (0)_{10}$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

3. Arithmetische Operationen

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$+ 0$$

$$\hline 2 \cdot 2 = 4$$

$$+ 1$$

$$\hline 5 \cdot 2 = 10$$

$$+ 0$$

$$\hline 10 \cdot 2 = 20$$

$$+ 0$$

$$\hline 20 \cdot 2 = 40$$

$$+ 0$$

$$\hline 40 \cdot 2 = 80$$

$$+ 1$$

$$\hline 81 \cdot 2 = 162$$

$$+ 1$$

$$\hline 163$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- ▶ Umwandlung Dual- in Dezimalzahl
 $Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$



Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101110110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101110110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101110110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101**1**10110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

1011**1**0110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101110110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101110**1**10111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101110110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101110110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101110110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

10111011011

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1499$$

$$1 + 2 \cdot 1499 = 2999$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$$Z = (1011\ 1011\ 0111)_2 = (2\ 999)_{10}$$

101110110111

$$1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 5 = 11$$

$$1 + 2 \cdot 11 = 23$$

$$0 + 2 \cdot 23 = 46$$

$$1 + 2 \cdot 46 = 93$$

$$1 + 2 \cdot 93 = 187$$

$$0 + 2 \cdot 187 = 374$$

$$1 + 2 \cdot 374 = 749$$

$$1 + 2 \cdot 749 = 1\ 499$$

$$1 + 2 \cdot 1\ 499 = 2\ 999$$

Zahlenbereich bei fester Wortlänge

Anzahl der Bits	Zahlenbereich jeweils von 0 bis ($2^n - 1$)
4-bit	$2^4 = 16$
8-bit	$2^8 = 256$
10-bit	$2^{10} = 1\,024$
12-bit	$2^{12} = 4\,096$
16-bit	$2^{16} = 65\,536$
20-bit	$2^{20} = 1\,048\,576$
24-bit	$2^{24} = 16\,777\,216$
32-bit	$2^{32} = 4\,294\,967\,296$
48-bit	$2^{48} = 281\,474\,976\,710\,656$
64-bit	$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$



Für die vereinfachte Schreibweise von großen bzw. sehr kleinen Werten ist die Präfixangabe als Abkürzung von Zehnerpotenzen üblich. Beispiele:

- ▶ Lichtgeschwindigkeit: $300\,000\text{ Km/s} = 30\text{ cm/ns}$
- ▶ Ruheenergie des Elektrons: $0,51\text{ MeV}$
- ▶ Strukturbreite heutiger Mikrochips: 12 nm
- ▶ usw.

Es gibt entsprechende Präfixe auch für das Dualsystem. Dazu werden Vielfache von $2^{10} = 1024 \approx 1000$ verwendet.

Präfixe für Einheiten im Dezimalsystem

Faktor	Name	Symbol
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	K
10^2	hecto	h
10^1	deka	da

Faktor	Name	Symbol
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	dezi	d

Präfixe für Einheiten im Dualsystem

Faktor	Name	Symbol	Langname
2^{80}	yobi	Yi	yottabinary
2^{70}	zebi	Zi	zettabinary
2^{60}	exbi	Ei	exabinary
2^{50}	pebi	Pi	petabinary
2^{40}	tebi	Ti	terabinary
2^{30}	gibi	Gi	gigabinary
2^{20}	mebi	Mi	megabinary
2^{10}	kibi	Ki	kilobinary

Beispiele: 1 kibibit = 1 024 bit
1 kilobit = 1 000 bit
1 megabit = 1 048 576 bit
1 gibibit = 1 073 741 824 bit

IEC-60027-2, Letter symbols to be used in electrical technology

In der Praxis werden die offiziellen Präfixe nicht immer sauber verwendet. Meistens ergibt sich die Bedeutung aber aus dem Kontext. Bei Speicherbausteinen sind Zweierpotenzen üblich, bei Festplatten dagegen die dezimale Angabe.

- ▶ DRAM-Modul mit 4 GB Kapazität: gemeint sind 2^{32} Bytes
- ▶ Flash-Speicherkarte 32 GB Kapazität: gemeint sind 2^{35} Bytes
- ▶ Festplatte mit Angabe 2 TB Kapazität: typisch $2 \cdot 10^{12}$ Bytes
- ▶ die tatsächliche angezeigte verfügbare Kapazität ist oft geringer, weil das jeweilige Dateisystem Platz für seine eigenen Verwaltungsinformationen belegt.

Darstellung von **gebrochenen Zahlen** als Erweiterung des Stellenwertsystems durch Erweiterung des Laufindex zu negativen Werten:

$$\begin{aligned} |z| &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i + \sum_{i=-\infty}^{i=-1} a_i \cdot b^i \\ &= \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \cdot b^i \end{aligned}$$

mit $a_i \in N$ und $0 \leq a_i < b$.

- ▶ Der erste Summand bezeichnet den ganzzahligen Anteil, während der zweite Summand für den gebrochenen Anteil steht.

Nachkommastellen im Dualsystem

▶ $2^{-1} = 0,5$

$2^{-2} = 0,25$

$2^{-3} = 0,125$

$2^{-4} = 0,0625$

$2^{-5} = 0,03125$

$2^{-6} = 0,015625$

$2^{-7} = 0,0078125$

$2^{-8} = 0,00390625$

...

- ▶ alle Dualbrüche sind im Dezimalsystem exakt darstellbar (d.h. mit endlicher Wortlänge)

- ▶ dies gilt umgekehrt **nicht**

Nachkommastellen im Dualsystem (cont.)

- ▶ gebrochene Zahlen können je nach Wahl der Basis evtl. nur als unendliche periodische Brüche dargestellt werden
- ▶ insbesondere erfordern viele endliche Dezimalbrüche im Dualsystem unendliche periodische Brüche
- ▶ Beispiel: Dezimalbrüche, eine Nachkommastelle

B=10	B=2	B=2	B=10
0,1	0,00011	0,001	0,125
0,2	0,0011	0,010	0,25
0,3	0,01001	0,011	0,375
0,4	0,0110	0,100	0,5
0,5	0,1	0,101	0,625
0,6	0,1001	0,110	0,75
0,7	0,10110	0,111	0,875
0,8	0,1100		
0,9	0,11100		

Umrechnung: Dezimalbruch nach Dual

Potenztafel zur Umrechnung

▶ Potenztafel	$2^{-1} = 0,5$	$2^{-7} = 0,0078125$
	$2^{-2} = 0,25$	$2^{-8} = 0,00390625$
	$2^{-3} = 0,125$	$2^{-9} = 0,001953125$
	$2^{-4} = 0,0625$	$2^{-10} = 0,0009765625$
	$2^{-5} = 0,03125$	$2^{-11} = 0,00048828125$
	$2^{-6} = 0,015625$	$2^{-12} = 0,000244140625$

- ▶ Beispiel: Dezimal 0,3

Berechnung durch Subtraktion der Werte

$$\begin{aligned}(0,3)_{10} &= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + \dots \\ &= 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-9} + \dots \\ &= (0,01001)_2\end{aligned}$$

Divisionsrestverfahren

- ▶ statt Division: bei Nachkommastellen Multiplikation $\cdot 2$
 - ▶ man nimmt den Dezimalbruch immer mit 2 mal
 - ▶ Resultat < 1 : eine 0 an den Dualbruch anfügen
–"– ≥ 1 : eine 1 –"–
und den ganzzahligen Anteil streichen: $-1,0$
 - ▶ Ende, wenn Ergebnis $1,0$ (wird zu 0)
–"– wenn Rest sich wiederholt \Rightarrow **Periode**
- ▶ Beispiel: Dezimal $0,59375$

$$\begin{array}{llll} 2 \cdot 0,59375 & = 1,1875 & \rightarrow 1 & 2^{-1} \\ 2 \cdot 0,1875 & = 0,375 & \rightarrow 0 & \vdots \\ 2 \cdot 0,375 & = 0,75 & \rightarrow 0 & \downarrow \text{Leserichtung} \\ 2 \cdot 0,75 & = 1,5 & \rightarrow 1 & \vdots \\ 2 \cdot 0,5 & = 1,0 & \rightarrow 1 & 2^{-5} \end{array}$$

$(0,59375)_{10} \leftrightarrow (0,10011)_2$

Drei gängige Varianten zur Darstellung negativer Zahlen

1. Betrag und Vorzeichen
2. Exzess-Codierung (Offset-basiert)
3. **Komplementdarstellung**
 - ▶ Integerrechnung häufig im Zweierkomplement
 - ▶ Gleitkommadarstellung mit Betrag und Vorzeichen
 - ▶ –"– Exponent als Exzess-Codierung

- ▶ Auswahl eines Bits als Vorzeichenbit
- ▶ meistens das MSB (engl. *most significant bit*)
- ▶ restliche Bits als Dualzahl interpretiert
- ▶ Beispiel für 4-bit Wortbreite:

0000	+0	1000	-0
0001	+1	1001	-1
0010	+2	1010	-2
0011	+3	1011	-3
0100	+4	1100	-4
0101	+5	1101	-5
0110	+6	1110	-6
0111	+7	1111	-7

- doppelte Codierung der Null: +0, -0
- Rechenwerke für Addition/Subtraktion aufwändig

Exzess-Codierung (Offset-basiert)

- ▶ einfache Um-Interpretation der Binärcodierung

$$z = c - \text{offset}$$

- ▶ z vorzeichenbehafteter Wert (Zahlenwert)
 - ▶ c binäre Ganzzahl (Code)
 - ▶ beliebig gewählter Offset
- Null wird also nicht mehr durch $000 \dots 0$ dargestellt
- + Größenvergleich zweier Zahlen bleibt einfach
- ▶ Anwendung: Exponenten im IEEE 754 Gleitkommaformat
 - ▶ und für einige Audioformate

Exzess-Codierung: Beispiele

Bitmuster	Binärcode	Exzess-8	Exzess-6	$z = c - \text{offset}$
0000	0	-8	-6	
0001	1	-7	-5	
0010	2	-6	-4	
0011	3	-5	-3	
0100	4	-4	-2	
0101	5	-3	-1	
0110	6	-2	0	
0111	7	-1	1	
1000	8	0	2	
1001	9	1	3	
1010	10	2	4	
1011	11	3	5	
1100	12	4	6	
1101	13	5	7	
1110	14	6	8	
1111	15	7	9	

Definition: das *b*-Komplement einer Zahl *z* ist

$$K_b(z) = b^n - z, \quad \text{für } z \neq 0 \\ = 0, \quad \text{für } z = 0$$

- ▶ *b*: die Basis (des Stellenwertsystems)
- ▶ *n*: Anzahl der zu berücksichtigenden Vorkommastellen
- ▶ mit anderen Worten: $K_b(z) + z = b^n$

- ▶ Stellenwertschreibweise

$$z = -a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \sum_{i=-m}^{n-2} a_i \cdot b^i$$

- ▶ Dualsystem: 2-Komplement
- ▶ Dezimalsystem: 10-Komplement

b-Komplement: Beispiele

$$\begin{array}{llll} b = 10 & n = 4 & K_{10}(3\,763)_{10} & = 10^4 - 3\,763 = 6\,237_{10} \\ & n = 2 & K_{10}(0,3763)_{10} & = 10^2 - 0,3763 = 99,6237_{10} \\ & n = 0 & K_{10}(0,3763)_{10} & = 10^0 - 0,3763 = 0,6237_{10} \\ \\ b = 2 & n = 2 & K_2(10,01)_2 & = 2^2 - 10,01_2 = 01,11_2 \\ & n = 8 & K_2(10,01)_2 & = 2^8 - 10,01_2 = 1111\,1101,11_2 \end{array}$$

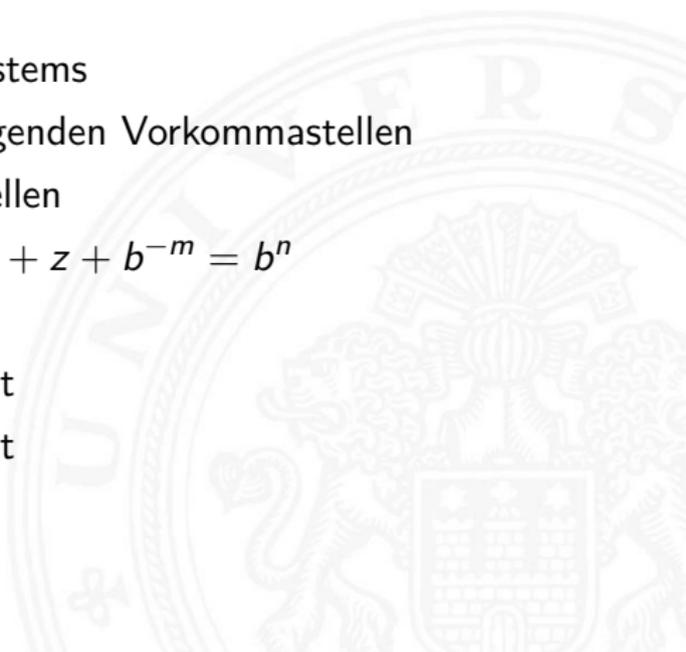


Definition: das $(b - 1)$ -**Komplement** einer Zahl z ist

$$\begin{aligned} K_{b-1}(z) &= b^n - z - b^{-m}, & \text{für } z \neq 0 \\ &= 0, & \text{für } z = 0 \end{aligned}$$

- ▶ b : die Basis des Stellenwertsystems
- ▶ n : Anzahl der zu berücksichtigenden Vorkommastellen
- ▶ m : Anzahl der Nachkommastellen
- ▶ mit anderen Worten: $K_{b-1}(z) + z + b^{-m} = b^n$

- ▶ Dualsystem: 1-Komplement
- ▶ Dezimalsystem: 9-Komplement



$(b - 1)$ -Komplement / b -Komplement: Trick

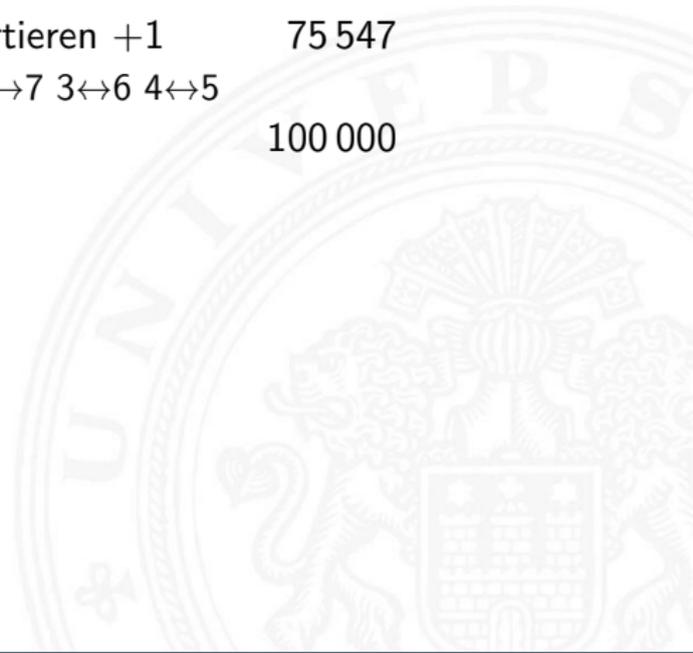
$$K_{b-1}(z) = b^n - b^{-m} - z, \quad \text{für } z \neq 0$$

- ▶ im Fall $m = 0$ gilt offenbar $K_b(z) = K_{b-1}(z) + 1$
- ⇒ das $(b - 1)$ -Komplement kann sehr einfach berechnet werden:
es werden einfach die einzelnen Bits/Ziffern invertiert.
- ▶ Dualsystem: 1-Komplement 1100 1001
 alle Bits invertieren 0011 0110
- ▶ Dezimalsystem: 9-Komplement 24 453
 alle Ziffern invertieren 75 546
 $0 \leftrightarrow 9$ $1 \leftrightarrow 8$ $2 \leftrightarrow 7$ $3 \leftrightarrow 6$ $4 \leftrightarrow 5$
 Summe: $99\,999 = 100\,000 - 1$
- ⇒ das b -Komplement kann sehr einfach berechnet werden:
es werden einfach die einzelnen Bits/Ziffern invertiert
und 1 an der niedrigsten Stelle aufaddiert.



$(b - 1)$ -Komplement / b -Komplement: Trick (cont.)

- ▶ Dualsystem: 2-Komplement 1100 1001
Bits invertieren +1 0011 0111
Summe: 1 0000 0000
- ▶ Dezimalsystem: 10-Komplement 24 453
Ziffern invertieren +1 75 547
 $0 \leftrightarrow 9$ $1 \leftrightarrow 8$ $2 \leftrightarrow 7$ $3 \leftrightarrow 6$ $4 \leftrightarrow 5$
Summe: 100 000



- ▶ bei Rechnung mit fester Stellenzahl n gilt:

$$K_b(z) + z = b^n = 0$$

weil b^n gerade nicht mehr in n Stellen hineinpasst

- ▶ also gilt für die Subtraktion auch:

$$x - y = x + K_b(y)$$

⇒ Subtraktion kann also durch Addition des b -Komplements ersetzt werden

- ▶ und für Integerzahlen gilt außerdem

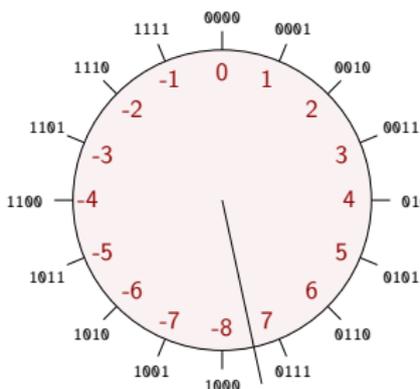
$$x - y = x + K_{b-1}(y) + 1$$

Subtraktion mit Einer- und Zweierkomplement

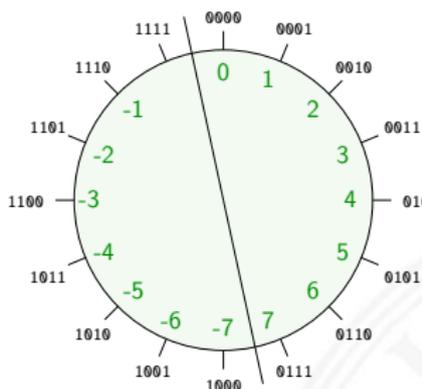
- ▶ Subtraktion ersetzt durch Addition des Komplements

Dezimal	1-Komplement	2-Komplement
<u>10</u>	<u>0000 1010</u>	<u>0000 1010</u>
+(-3)	1111 1100	1111 1101
<u>+7</u>	<u>1 0000 0110</u>	<u>1 0000 0111</u>
Übertrag:	addieren +1	verwerfen
	<u>0000 0111</u>	<u>0000 0111</u>

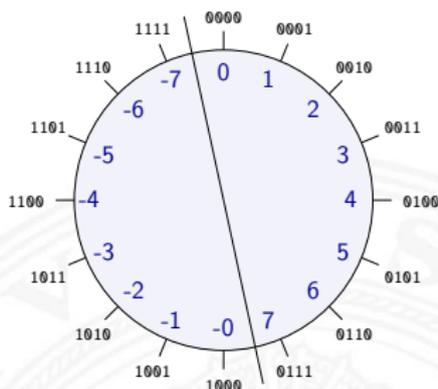
Beispiel für 4-bit Zahlen



2-Komplement



1-Komplement



Betrag+Vorzeichen

- ▶ Komplement-Arithmetik als Winkeladdition (siehe 4 Arithmetik)
- ▶ Web-Anwendung: *Visualisierung im Zahlenkreis* (JavaScript, see: [Kor16])

Darstellung negativer Zahlen: Beispiele

N	+N	-N	-N	-N	-N
Dezimal	Binär	VZ+Betrag	1-Komplement	2-Komplement	Exzess-128
1	0000 0001	1000 0001	1111 1110	1111 1111	0111 1111
2	0000 0010	1000 0010	1111 1101	1111 1110	0111 1110
3	0000 0011	1000 0011	1111 1100	1111 1101	0111 1101
4	0000 0100	1000 0100	1111 1011	1111 1100	0111 1100
5	0000 0101	1000 0101	1111 1010	1111 1011	0111 1011
6	0000 0110	1000 0110	1111 1001	1111 1010	0111 1010
7	0000 0111	1000 0111	1111 1000	1111 1001	0111 1001
8	0000 1000	1000 1000	1111 0111	1111 1000	0111 1000
9	0000 1001	1000 1001	1111 0110	1111 0111	0111 0111
10	0000 1010	1000 1010	1111 0101	1111 0110	0111 0110
20	0001 0100	1001 0100	1110 1011	1110 1100	0110 1100
30	0001 1110	1001 1110	1110 0001	1110 0010	0110 0010
40	0010 1000	1010 1000	1101 0111	1101 1000	0101 1000
50	0011 0010	1011 0010	1100 1101	1100 1110	0100 1110
60	0011 1100	1011 1100	1100 0011	1100 0100	0100 0100
70	0100 0110	1100 0110	1011 1001	1011 1010	0011 1010
80	0101 0000	1101 0000	1010 1111	1011 0000	0011 0000
90	0101 1010	1101 1010	1010 0101	1010 0110	0010 0110
100	0110 0100	1110 0100	1001 1011	1001 1100	0001 1100
127	0111 1111	1111 1111	1000 0000	1000 0001	0000 0001
128	—	—	—	1000 0000	0000 0000
MSB	0	1	1	1	0

Wie kann man „wissenschaftliche“ Zahlen darstellen?

- ▶ Masse der Sonne $1,989 \cdot 10^{30}$ Kg
- ▶ Ladung eines Elektrons 0,000 000 000 000 000 000 16 C
- ▶ Anzahl der Atome pro Mol 602 300 000 000 000 000 000 000
- ...

Darstellung im Stellenwertsystem?

- ▶ gleichzeitig sehr große und sehr kleine Zahlen notwendig
- ▶ entsprechend hohe Zahl der Vorkomma- und Nachkommastellen
- ▶ durchaus möglich (Java3D: 256-bit Koordinaten)
- ▶ aber normalerweise sehr unpraktisch
- ▶ typische Messwerte haben nur ein paar Stellen Genauigkeit

Grundidee: **halblogarithmische Darstellung einer Zahl**

- ▶ Vorzeichen (+1 oder -1)
- ▶ *Mantisse* als normale Zahl im Stellenwertsystem
- ▶ *Exponent* zur Angabe der Größenordnung

$$z = \textit{sign} \cdot \textit{mantisse} \cdot \textit{basis}^{\textit{exponent}}$$

- ▶ handliche Wertebereiche für Mantisse und Exponent
- ▶ arithmetische Operationen sind effizient umsetzbar
- ▶ Wertebereiche für ausreichende Genauigkeit wählen

Hinweis: rein logarithmische Darstellung wäre auch möglich, aber Addition/Subtraktion sind dann sehr aufwändig.

$$z = (-1)^s \cdot m \cdot 10^e$$

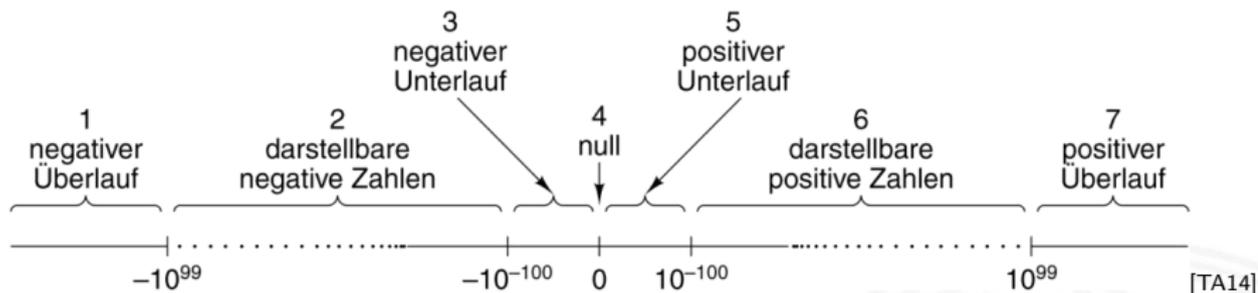
- ▶ s Vorzeichenbit
 - ▶ m Mantisse als Festkomma-Dezimalzahl
 - ▶ e Exponent als ganze Dezimalzahl
- ▶ Schreibweise in C/Java: $\langle \text{Vorzeichen} \rangle \langle \text{Mantisse} \rangle E \langle \text{Exponent} \rangle$
- | | | |
|----------|-----------------------|-------------------------------|
| 6.023E23 | $6,023 \cdot 10^{23}$ | Avogadro-Zahl |
| 1.6E-19 | $1,6 \cdot 10^{-19}$ | Elementarladung des Elektrons |

Gleitkomma: Beispiel für Zahlenbereiche

Stellen		Zahlenbereich	
Mantisse	Exponent	$0 \leftarrow$	$\rightarrow \infty$
3	1	10^{-12}	10^9
3	2	10^{-102}	10^{99}
3	3	10^{-1002}	10^{999}
3	4	10^{-10002}	10^{9999}
4	1	10^{-13}	10^9
4	2	10^{-103}	10^{99}
4	3	10^{-1003}	10^{999}
4	4	10^{-10003}	10^{9999}
5	1	10^{-14}	10^9
5	2	10^{-104}	10^{99}
5	3	10^{-1004}	10^{999}
5	4	10^{-10004}	10^{9999}
10	3	10^{-1009}	10^{999}
20	3	10^{-1019}	10^{999}

- ▶ 1937 Zuse: Z1 mit 22-bit Gleitkomma-Datenformat
- ▶ 195x Verbreitung von Gleitkomma-Darstellung für numerische Berechnungen
- ▶ 1980 Intel 8087: erster Koprozessor-Chip, ca. 45 000 Transistoren, ca. 50K FLOPS/s
- ▶ 1985 IEEE 754 Standard für Gleitkomma
- ▶ 1989 Intel 486 mit integriertem Koprozessor
- ▶ 1995 Java-Spezifikation fordert IEEE 754
- ▶ 1996 ASCI-RED: 1 TFLOPS (9 152 Pentium Pro)
- ▶ 2008 Roadrunner: 1 PFLOPS (12 960 Cell)
- ▶ 2018 Summit: 148,6 PFLOPS
- ...

FLOPS := Floating-Point Operations Per Second



- ▶ Darstellung üblicherweise als Betrag+Vorzeichen
- ▶ negative und positive Zahlen gleichberechtigt (symmetrisch)
- ▶ separate Darstellung für den Wert Null
- ▶ sieben Zahlenbereiche: siehe Grafik
- ▶ relativer Abstand benachbarter Zahlen bleibt ähnlich (vgl. dagegen Integer: $0/1, 1/2, 2/3, \dots, 65\,535/65\,536, \dots$)

$$z = (-1)^s \cdot m \cdot 10^e$$

- ▶ diese Darstellung ist bisher nicht eindeutig:

$$123 \cdot 10^0 = 12,3 \cdot 10^1 = 1,23 \cdot 10^2 = 0,123 \cdot 10^3 = \dots$$

normalisierte Darstellung

- ▶ Exponent anpassen, bis Mantisse im Bereich $1 \leq m < b$ liegt
- ⇒ Darstellung ist dann eindeutig
- ⇒ im Dualsystem: erstes Vorkommbit ist dann 1 und muss nicht explizit gespeichert werden
- ▶ evtl. zusätzlich sehr kleine Zahlen nicht-normalisiert

bis 1985 ein Wildwuchs von Gleitkomma-Formaten:

- ▶ unterschiedliche Anzahl Bits in Mantisse und Exponent
- ▶ Exponent mit Basis 2, 10, oder 16
- ▶ diverse Algorithmen zur Rundung
- ▶ jeder Hersteller mit eigener Variante
- Numerische Algorithmen nicht portabel

1985: Publikation des Standards IEEE 754 zur Vereinheitlichung

- ▶ klare Regeln, auch für Rundungsoperationen
- ▶ große Akzeptanz, mittlerweile der universale Standard
- ▶ 2008: IEEE 754-2008 mit 16- und 128-bit Formaten

Details: unter anderem in en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754 oder in Goldberg [Gol91]

- ▶ 32-bit Format: einfache Genauigkeit (*single precision, float*)

Bits 1 8 23



- ▶ 64-bit Format: doppelte Genauigkeit (*double precision, double*)

Bits 1 11 52



- ▶ Mantisse als normalisierte Dualzahl: $1 \leq m < 2$
- ▶ Exponent in Exzess-127 bzw. Exzess-1023 Codierung
Exp.-Bits: 00...001 bis 11...110
- ▶ einige Sonderwerte: Null (+0, -0), NaN, Infinity
Exp.-Bits: 00...000 und 11...111

Eigenschaft	einfache	doppelte Genauigkeit
Bits im Vorzeichen	1	1
Bits im Exponenten	8	11
Bits in der Mantisse	23	52
Bits insgesamt	32	64
Exponentensystem	Exzess-127	Exzess-1023
Exponentenbereich	$-126 \dots + 127$	$-1022 \dots + 1023$
kleinste normalisierte Zahl	2^{-126}	2^{-1022}
größte "-"	$\approx 2^{128}$	$\approx 2^{1024}$
$\hat{=}$ Dezimalbereich	$\approx 10^{-38} \dots 10^{38}$	$\approx 10^{-308} \dots 10^{308}$
kleinste nicht normalisierte Zahl	$\approx 10^{-45}$	$\approx 10^{-324}$

The screenshot shows a software interface for demonstrating IEEE-754 floating-point numbers. At the top right, the text "IEEE-754" is displayed in blue. Below it is a dropdown menu with two options: "short real" (selected) and "long real". On the left, a text input field contains the decimal number "178.125". Below this field, the binary representation is shown: a sign bit "0" in a green box, an exponent "10000110" in a red box, an implicit leading "1." in a blue box, and a mantissa "011001000100000000000000" in a blue box. Labels "± Exponent" and "Mantisse" are positioned above the respective parts of the binary string. A vertical blue label "implizit" is placed between the exponent and mantissa fields.

- ▶ Zahlenformat wählen (float=short real, double=long real)
- ▶ Dezimalzahl in oberes Textfeld eingeben
- ▶ Mantisse/Exponent/Vorzeichen in unteres Textfeld eingeben
- ▶ andere Werte werden jeweils aktualisiert

K. von der Heide [Hei05], Interaktives Skript T1, demoieeee754

- ▶ 1-bit Vorzeichen 8-bit Exponent (Exzess-127), 23-bit Mantisse

$$z = (-1)^s \cdot 2^{(eeee\ eeee-127)} \cdot 1, mmmm\ mmmm\ mmmm \dots mmm$$

- ▶ 1 1000 0000 1110 0000 0000 0000 0000 0000

$$\begin{aligned} z &= -1 \cdot 2^{(128-127)} \cdot (1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0) \\ &= -1 \cdot 2 \cdot 1,875 = -3,750 \end{aligned}$$

- ▶ 0 1111 1110 0001 0011 0000 0000 0000 0000

$$\begin{aligned} z &= +1 \cdot 2^{(254-127)} \cdot (1 + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8}) \\ &= 2^{127} \cdot 1,07421875 = 1,8276885 \cdot 10^{38} \end{aligned}$$



Beispiele: float (cont.)

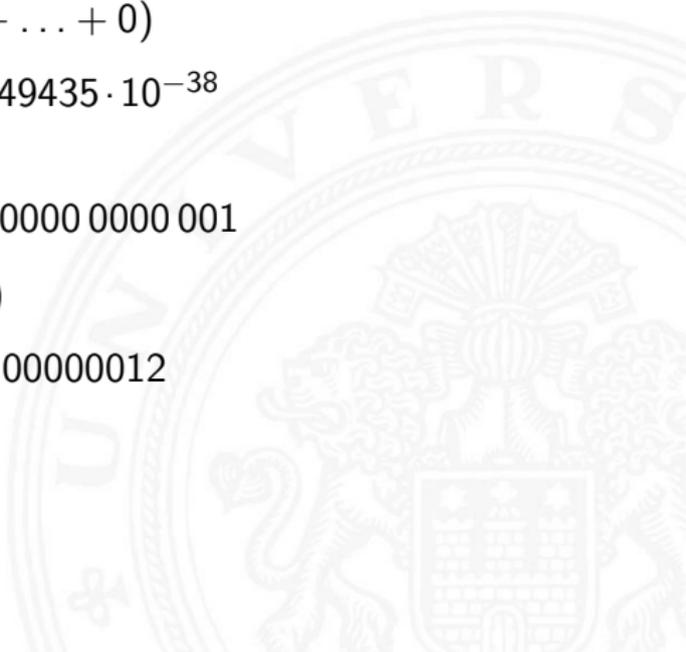
$$z = (-1)^s \cdot 2^{(eeee\ eeee-127)} \cdot 1, mmmm\ mmmm\ mmmm \dots mmm$$

- ▶ 1 0000 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0000 000

$$\begin{aligned} z &= -1 \cdot 2^{(1-127)} \cdot (1 + 0 + 0 + \dots + 0) \\ &= -1 \cdot 2^{-126} \cdot 1,0 = -1,17549435 \cdot 10^{-38} \end{aligned}$$

- ▶ 0 0111 1111 0000 0000 0000 0000 0000 0000 001

$$\begin{aligned} z &= +1 \cdot 2^{(127-127)} \cdot (1 + 2^{-23}) \\ &= 1 \cdot (1 + 0,00000012) = 1,00000012 \end{aligned}$$



Addition von Gleitkommazahlen $y = a_1 + a_2$

- ▶ Skalierung des betragsmäßig kleineren Summanden
- ▶ Erhöhen des Exponenten, bis $e_1 = e_2$ gilt
- ▶ gleichzeitig entsprechendes Skalieren der Mantisse \Rightarrow schieben
- ▶ Achtung: dabei verringert sich die effektive Genauigkeit des kleineren Summanden

- ▶ anschließend Addition/Subtraktion der Mantissen
- ▶ ggf. Normalisierung des Resultats

- ▶ Beispiele in den Übungen

Gleitkomma-Addition: Beispiel

$$a = 9,725 \cdot 10^7 \quad b = 3,016 \cdot 10^6$$

$$y = (a + b)$$

$$= (9,725 \cdot 10^7 + 0,3016 \cdot 10^7) \quad \text{Angleichung der Exponenten}$$

$$= (9,725 + 0,3016) \cdot 10^7 \quad \text{Distributivgesetz}$$

$$= (10,0266) \cdot 10^7 \quad \text{Addition der Mantissen}$$

$$= 1,00266 \cdot 10^8 \quad \text{Normalisierung}$$

$$= 1,003 \cdot 10^8 \quad \text{Runden bei fester Stellenzahl}$$

- ▶ normalerweise nicht informationstreu !

Probleme bei Subtraktion/Addition zweier Gleitkommazahlen

Fall 1 Exponenten stark unterschiedlich

- ▶ kleinere Zahl wird soweit skaliert, dass von der Mantisse (fast) keine gültigen Bits übrigbleiben
- ▶ kleinere Zahl geht verloren, bzw. Ergebnis ist sehr ungenau
- ▶ Beispiel: $1.0E20 + 3.14159 = 1.0E20$

Fall 2 Exponenten gleich, Mantissen fast gleich

- ▶ fast alle Bits der Mantisse löschen sich aus
- ▶ Resultat hat nur noch wenige Bits effektiver Genauigkeit

Multiplikation von Gleitkommazahlen $y = a_1 \cdot a_2$

- ▶ Multiplikation der Mantissen und Vorzeichen

Anmerkung: Vorzeichen s_i ist hier $-1^{s_{Bit}}$

Berechnung als $s_{Bit} = s_{Bit_1} \text{ XOR } s_{Bit_2}$

- ▶ Addition der Exponenten
- ▶ ggf. Normalisierung des Resultats

$$y = (s_1 \cdot s_2) \cdot (m_1 \cdot m_2) \cdot b^{e_1 + e_2}$$

Division entsprechend:

- ▶ Division der Mantissen und Vorzeichen
- ▶ Subtraktion der Exponenten
- ▶ ggf. Normalisierung des Resultats

$$y = (s_1 / s_2) \cdot (m_1 / m_2) \cdot b^{e_1 - e_2}$$

- ▶ schnelle Verarbeitung großer Datenmengen
 - ▶ Statusabfrage nach jeder einzelnen Operation unbequem
 - ▶ trotzdem Hinweis auf aufgetretene Probleme wichtig
- ⇒ *Inf* (*infinity*): spezieller Wert für plus/minus Unendlich
Beispiele: $2/0$, $-3/0$, $\arctan(\pi)$ usw.
- ⇒ *NaN* (*not-a-number*): spezieller Wert für ungültige Operation
Beispiele: $\sqrt{-1}$, $\arcsin(2,0)$, Inf/Inf usw.

IEEE 754: Infinity *Inf*, Not-a-Number *NaN*, ± 0 (cont.)

normalisiert $V \mid 0 < Exp < Max \mid$ jedes Bitmuster

denormalisiert $V \mid 00\dots 0 \mid$ jedes Bitmuster $\neq 00\dots 0$

0 $V \mid 00\dots 0 \mid 00\dots 0$

Inf $V \mid 11\dots 1 \mid 00\dots 0$

NaN $V \mid 11\dots 1 \mid$ jedes Bitmuster $\neq 00\dots 0$

- ▶ Rechnen mit *Inf* funktioniert normal: $0/Inf = 0$
- ▶ NaN für undefinierte Werte: $\text{sqrt}(-1)$, $\text{arcsin}(2.0)$...
- ▶ jede Operation mit *NaN* liefert wieder *NaN*

► Beispiele

```
0 / 0           = NaN
1 / 0           = Infinity
-1 / 0          = -Infinity
1 / Infinity    = 0.0
Infinity + Infinity = Infinity
Infinity + -Infinity = NaN
Infinity * -Infinity = -Infinity
Infinity + NaN   = NaN
Infinity * 0     = NaN
sqrt(2)         = 1.4142135623730951
sqrt(-1)        = NaN
0 + NaN         = NaN
NaN == NaN      = false
Infinity > NaN  = false
```

Achtung
Achtung

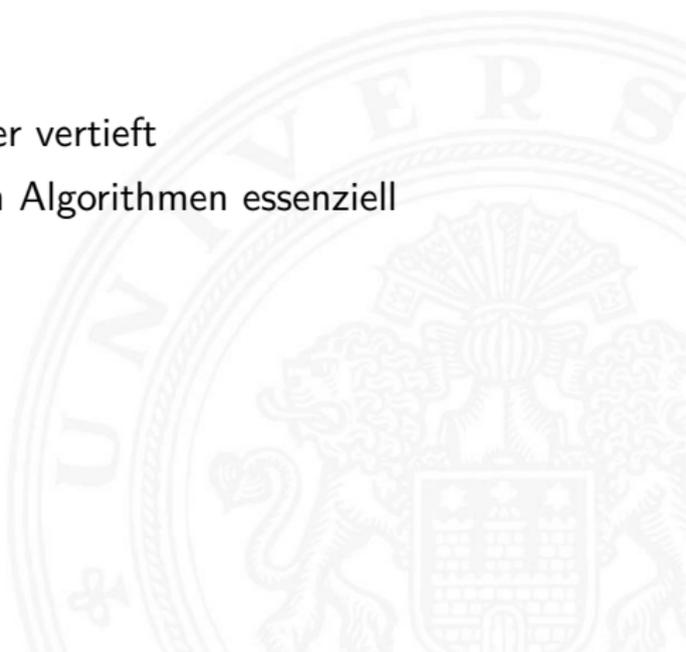
- ▶ die Differenz zwischen den beiden Gleitkommazahlen, die einer gegebenen Zahl am nächsten liegen
- ▶ diese beiden Werte unterscheiden sich im niederwertigsten Bit der Mantisse \Rightarrow Wertigkeit des LSB
- ▶ daher ein Maß für die erreichbare Genauigkeit

- ▶ IEEE 754 fordert eine Genauigkeit von 0,5 ULP für die elementaren Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Quadratwurzel
= der bestmögliche Wert
- ▶ gute Mathematik-Software garantiert ≤ 1 ULP auch für höhere Funktionen: Logarithmus, Sinus, Cosinus usw.
- ▶ Progr.sprachenunterstützung, z.B. `java.lang.Math.ulp(double d)`



- ▶ sorgfältige Behandlung von Rundungsfehlern essenziell
- ▶ teilweise Berechnung mit zusätzlichen Schutzstellen
- ▶ dadurch Genauigkeit ± 1 ULP für alle Funktionen
- ▶ ziemlich komplexe Sache

- ▶ in dieser Vorlesung nicht weiter vertieft
- ▶ beim Einsatz von numerischen Algorithmen essenziell



- ▶ die meisten Rechner sind für eine Wortlänge optimiert
- ▶ 8-bit, 16-bit, 32-bit, 64-bit ... Maschinen
- ▶ die jeweils typische Länge eines Integerwertes
- ▶ und meistens auch von Speicheradressen
- ▶ zusätzlich Teile oder Vielfache der Wortlänge unterstützt

- ▶ 32-bit Rechner
 - ▶ Wortlänge für Integerwerte ist 32-bit
 - ▶ adressierbarer Speicher ist 2^{32} Bytes (4 GiB)
 - ▶ bereits zu knapp für speicherhungrige Applikationen
- ▶ inzwischen sind 64-bit Rechner bei PCs/Laptops Standard
- ▶ kleinere Wortbreiten: *embedded*-Systeme (Steuerungsrechner), Mobilgeräte etc.

- ▶ gängige Prozessoren unterstützen mehrere Datentypen
- ▶ entsprechend der elementaren Datentypen in C, Java ...
- ▶ `void*` ist ein **Pointer** (Referenz, Speicheradresse)
- ▶ Beispiel für die Anzahl der Bytes:

C Datentyp	DEC Alpha	typ. 32-bit	Intel IA-32 (x86)
int	4	4	4
long int	8	4	4
char	1	1	1
short	2	2	2
float	4	4	4
double	8	8	8
long double	8	8	10/12
void *	8	4	4

Datentypen auf Maschinenebene (cont.)

Abhängigkeiten (!)

- ▶ Prozessor
- ▶ Betriebssystem
- ▶ Compiler

segment word size	16 bit			32 bit				64 bit					
	Microsoft	Borland	Watcom	Microsoft	Intel Windows	Borland	Watcom	Gnu v.3.x	Intel Linux	Microsoft	Intel Windows	Gnu	Intel Linux
bool	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
char	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
wchar_t		2		2	2	2	2	2	2	2	2	4	4
short int	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
int	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
long int	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	8	8
__int64				8	8			8	8	8	8	8	8
enum	2	2	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
float	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
double	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
long double	10	10	8	8	16	10	8	12	12	8	16	16	16
__m64				8	8					8	8	8	8
__m128				16	16				16	16	16	16	16
__m256					32				32		32		32
pointer	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8
far pointer	4	4	4										
function pointer	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8
data member pointer (min)	2	4	6	4	4	8	4	4	4	4	4	8	8
data member pointer (max)		4	6	12	12	8	12	4	4	12	12	8	8
member function pointer (min)	2	12	6	4	4	12	4	8	8	8	8	16	16
member function pointer (max)		12	6	16	16	12	16	8	8	24	24	16	16

www.agner.org/optimize/calling_conventions.pdf

Table 1 shows how many bytes of storage various objects use for different compilers.

- [BO15] R.E. Bryant, D.R. O'Hallaron:
Computer systems – A programmers perspective.
3rd global ed., Pearson Education Ltd., 2015.
ISBN 978-1-292-10176-7. csapp.cs.cmu.edu
- [TA14] A.S. Tanenbaum, T. Austin: *Rechnerarchitektur – Von der digitalen Logik zum Parallelrechner.*
6. Auflage, Pearson Deutschland GmbH, 2014.
ISBN 978-3-8689-4238-5
- [If10] G. Ifrah: *Universalgeschichte der Zahlen.*
Tolkemitt bei Zweitausendeins, 2010.
ISBN 978-3-942048-31-6
- [Kor16] Laszlo Korte: *TAMS Tools for eLearning.*
Uni Hamburg, FB Informatik, 2016, BSc Thesis. tams.informatik.uni-hamburg.de/research/software/tams-tools



[Gol91] D. Goldberg: *What every computer scientist should know about floating-point.* in: *ACM Computing Surveys* 23 (1991), March, Nr. 1, S. 5–48.

www.validlab.com/goldberg/paper.pdf

[Knu08] D.E. Knuth: *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0, Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions.*
Addison-Wesley Professional, 2008. ISBN 978–0–321–53496–5

[Knu09] D.E. Knuth: *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 1, Bitwise Tricks & Techniques; Binary Decision Diagrams.*
Addison-Wesley Professional, 2009. ISBN 978–0–321–58050–4

- [Hei05] K. von der Heide: *Vorlesung: Technische Informatik 1 — interaktives Skript*. Universität Hamburg, FB Informatik, 2005.
tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2004ws/vorlesung/t1
Float/Double-Demonstration: [demoieee754](#)
- [Omo94] A.R. Omondi: *Computer Arithmetic Systems – Algorithms, Architecture and Implementations*. Prentice-Hall International, 1994. ISBN 0-13-334301-4
- [Kor01] I. Koren: *Computer Arithmetic Algorithms*. 2nd edition, CRC Press, 2001. ISBN 978-1-568-81160-4.
www.ecs.umass.edu/ece/koren/arith
- [Spa76] O. Spaniol: *Arithmetik in Rechenanlagen*. B. G. Teubner, 1976. ISBN 3-519-02332-6