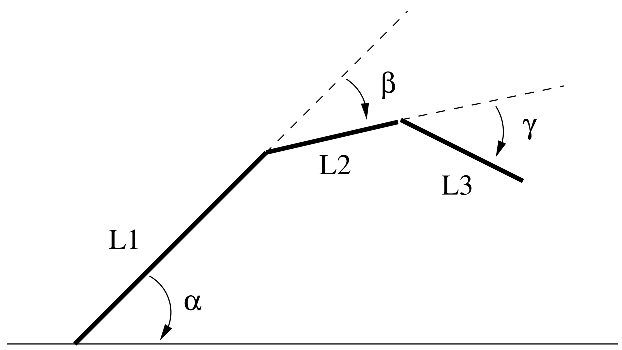
Übungen zu "Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik"
SoSe 2015

Übungsblatt 7

Ausgegeben am 22.5.2015
Abgabe der Lösungen (Papier oder elektronisch) bis Mittwoch 02. Juni

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass die Multiplikation mit einer Rotationsmatrix R die Länge L eines Vektors $x = (x_1, x_2, x_3)$ nicht ändert, d.h., dass gilt $L(x) = L(R\,x)$.
Hinweis: Es genügt, diese Aussage für eine der drei elementaren Drehmatrizen $R_{x,\alpha}, R_{y,\beta}$ oder $R_{z,\delta}$ um die x-, y- bzw. z-Achse zu beweisen, weil sich jedes R als Produkt elementarer Drehmatrizen schreiben lässt.
(4 Punkte)

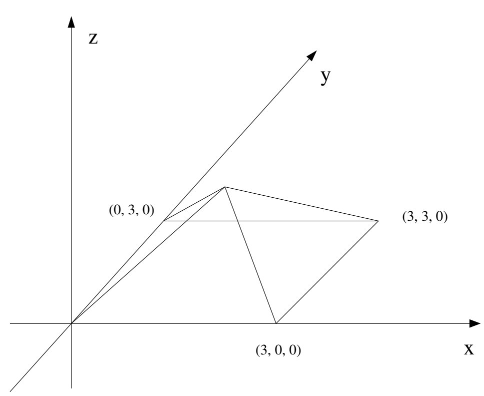
Aufgabe 2: Gegeben sei die folgende kinematische Kette in der Ebene.



mit L1= 1 m, L2= L3= 0,5 m, $\alpha = \gamma = 45^o, \beta = 30^o$.

Berechnen Sie die Position des Endpunkts der Kette, wenn der Anfang im Punkt $(1\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$ liegt.
(4 Punkte)

Aufgabe 3: Gegeben sei eine Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat mit den Eckpunkten $P_1 = (0,0,0), P_2 = (3,0,0), P_3 = (3,3,0)$ und $P_4 = (0,3,0)$ bildet. Weiter gelte für die Höhe H der Pyramide $H = 2$.



a) Berechnen Sie die Drehmatrix T, die den Punkt P_2 in den Punkt $(2, 2, 1)$ dreht, indem Sie zuerst eine geeignete Drehung um die y-Achse und dann eine Drehung um die z-Achse durchführen. (4 Punkte)

b) In welche Punkte werden durch die oben berechnete Matrix T die Punkte P_1, P_3, P_4 und die Spitze der Pyramide gedreht?
(2 Punkte)

Aufgabe 4 (optional; Anrechnung als Bonuspunkte): Mit dem Stoff aus der Vorlesung lässt sich auch ein Verfahren entwickeln, um im dreimensionalen Raum einen Punkt P_x um einen gegebenen Winkel α um eine beliebige Gerade $G = p_0 + p_1\, t$ zu drehen. Wir beschränken uns dabei zunächst auf den Fall, dass die Gerade G durch den Nullpunkt geht, d.h., dass gilt $p_0 = (0, 0, 0)$. Die Idee unseres Algorithmus ist es, die Gerade G durch Drehmatrizen $T_z(\phi_z)$ und $T_y(\phi_y)$ so zu drehen, dass sie auf der x-Achse zu liegen kommt. Dann kann man den gegeben Punkt P_x, nachdem man ihn ebenfalls mit $T_z(\phi_z)$ und $T_y(\phi_y)$ transformiert hat, um den Winkel α um die x-Achse drehen und das Ergebnis dann wieder zurücktransformieren.
Die Frage ist jetzt, wie man die Matrizen $T_z(\phi_z)$ und $T_y(\phi_y)$ bestimmen kann. Das ist aber relativ einfach. Der Drehwinkel um die z-Achse ist einfach der Steigungswinkel der Geraden G projeziert auf die x-y-Ebene. Wenn $p_1 = (p_x, p_y, p_z)$ ist, also $\phi_z = \arctan(P_y/P_x)$. Jetzt kann man (im Uhrzeigersinn!) den Punkt p_1 und damit die Gerade G um den Winkel ϕ_z drehen.
Sei also $p_2 = T_z(\phi_z)\, p_1^T$. Ähnlich wie ϕ_z lässt sich jetzt aus p_2 der Winkel ϕ_y bestimmen. Der Punkt $p_3 = T_y(\phi_y)\, T_z(\phi_z)\, p_1$ sollte jetzt auf der x-Achse liegen. Jetzt kann wie wie oben angegen um den Winkel α drehen und das Ergebnis zurücktransformieren.

a) Wenden Sie den Algorithmus auf den Punkt $P_x = (1, 1, 0)$, die Gerade $G = (1, 2, 1)\, t$ und den Winkel $\alpha = 90^o$ an. Geben Sie dabei bitte auch die Zwischenergebnisse an.
(4 Punkte)

b) Wie müsste man den Algorithmus abändern, wenn die Gerade nicht mehr durch den Nullpunkt geht, d.h, wenn $p_0 \neq (0, 0, 0)$ ist?
(3 Punkte)