

Übungen zu “Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik”  
SoSe 2015

Übungsblatt 12

Ausgegeben am 2. Juli 2015

Abgabe der Lösungen (Papier oder elektronisch) bis Dienstag 7. Juli 2015

Die Aufgaben 1 und 2 sind optional. Hiermit besteht die Möglichkeit, zusätzliche Punkte zu erwerben. Die Aufgaben 3 und 4 sind Pflicht.

**Aufgabe 1 (optional, Anrechnung als Bonuspunkte):**

Wir betrachten einen Würfel, bei dem nicht wie üblich die Zahlen 1 bis 6 stehen, sondern die Zahlen 1, 2 und 3 jeweils zweimal.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf eine 1 auftritt?
- Wir würfeln dreimal mit dem Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Zahlen größer als 7 ist?
- Wie groß ist bei Wahrscheinlichkeit, bei drei Würfeln keine 1 zu würfeln, genau einmal eine 1 zu würfeln, mindestens einmal eine 1 zu würfeln?
- Was ist der Erwartungswert bei einem Wurf des Würfels?

(6 Punkte)

**Aufgabe 2 (optional, Anrechnung als Bonuspunkte):**

Wir betrachten wieder den Würfel aus Aufgabe 1 und würfeln zweimal. Der Zufallsvariablen  $X$  weisen wir die höchste der beiden gewürfelten Zahlen zu und der Zufallsvariablen  $Y$  die Summe der beiden gewürfelten Zahlen.

- Welche Wahrscheinlichkeiten erhalten wir für  $p(X = 2)$ ,  $p(Y = 1)$ ,  $p(Y = 3)$  und  $p(X = 2, Y = 3)$ ?  
Sind die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  unabhängig voneinander?  
(Bitte begründen)
- Wie groß sind die Erwartungswerte  $E(X)$  und  $E(Y)$ ?

c) Welche Wert hat  $Cov(X, Y)$ ?

Hinweis: Die in der Vorlesung angegebene Formel

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

lässt sich umschreiben zu

$$Cov(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p(X = x_i, Y = y_j) - E(X)E(Y)$$

Was man jetzt braucht, ist eine  $3 \cdot 5$ -Matrix für die möglichen  $p(x, y)$ , wobei einige der Einträge auch 0 sein können (z.B. für  $p(X=1, Y=6)$ ). Zur Kontrolle kann man noch die Summe über alle Einträge in der Matrix berechnen, die 1 sein muss.

(10 Punkte)

### Aufgabe 3:

Zu einer Klausur erscheinen 90 Männer und 30 Frauen. Die Erfahrung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann die Klausur nicht besteht, 0.25 ist, bei einer Frau 0.2.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der die Klausur nicht besteht, ein Mann ist?

(3 Punkte)

### Aufgabe 4:

In einer Flüssigkeit  $F$  können drei Substanzen  $S_1, S_2, S_3$  gelöst sein und zwar in folgenden Kombinationen, die alle gleichwahrscheinlich sind:

- $K_0$  Keins der  $S_i$  ist in  $F$  enthalten
- $K_1$   $S_1$  ist in  $F$  enthalten
- $K_2$   $S_2$  und  $S_3$  sind in  $F$  enthalten
- $K_3$   $S_1, S_2$  und  $S_3$  sind in  $F$  enthalten

Andere Kombinationen können nicht auftreten.

Messen lassen sich die  $S_i$  immer nur einzeln, also nicht z.B.  $S_1$  gleichzeitig

mit  $S_3$ . Sei  $Bel(K_i)$  der Believe, dass die Kombination  $K_i$  vorliegt und  $M_i$  das Ergebnis der Prüfung auf die Substanz  $S_i$ . Mögliche Ergebnisse sind dabei  $\mathbf{1}$ , wenn  $S_i$  in  $F$  enthalten ist und  $\mathbf{0}$ , wenn  $S_i$  nicht in  $F$  enthalten ist.

- a) Wie groß ist  $Bel(K_1)$ , bevor Sie irgendeine Messung durchgeführt haben?
- b) Wie viele Messungen müssen Sie für  $Bel(K_1) = 1$  machen, wenn alle Messungen fehlerfrei sind? Fehlerfrei bedeutet hier, dass für die Wahrscheinlichkeit der Messung aller drei Substanzen ( $i = 1 \dots 3$ ) gilt:

$$p(M_i = 1 | S_i = 1) = 1.0;$$

$$p(M_i = 1 | S_i = 0) = 0.0;$$

$$p(M_i = 0 | S_i = 1) = 0.0;$$

$$p(M_i = 0 | S_i = 0) = 1.0$$

(z. B.  $M_i = 1$ : Messung detektiert Substanz  $i$ ;  $S_i = 1$ : Substanz  $i$  ist vorhanden usw.)

- c) Sei jetzt jede Messung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 fehlerfrei, also:

$$p(M_i = 1 | S_i = 1) = 0.9;$$

$$p(M_i = 1 | S_i = 0) = 0.1$$

$$p(M_i = 0 | S_i = 1) = 0.1$$

$$p(M_i = 0 | S_i = 0) = 0.9$$

Wie groß ist  $Bel(K_1)$ , wenn Sie folgende Messergebnisse erhalten haben:

c1)  $M_1 = \mathbf{1}$  (eine Messung)

c2)  $M_1 = \mathbf{1}, M_2 = \mathbf{0}$  (zwei Messungen)

c3)  $M_1 = \mathbf{1}, M_2 = \mathbf{0}, M_3 = \mathbf{0}$  (drei Messungen)

(10 Punkte)