# 64-544
# Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

http://tams.informatik.uni-hamburg.de/
lectures/2015ss/vorlesung/GdSR

Jianwei Zhang, Bernd Schütz

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
**Technische Aspekte Multimodaler Systeme**

Sommersemester 2015

# Gliederung

# Agenda

# Einführung in die Fuzzy-Regelung

- Lotfi A. Zadeh Begründer der Theorie der unscharfen Mengen (Fuzzy Sets, 1965)
  - Professor an der Universität Berkeley, Kalifornien seit 1959
  - Systemtheorie, Entscheidungstheorie, Informationssysteme
- Durchbruch der Fuzzy-Set-Theorie seit 1980er Jahren
  - insbesondere Japan
  - Beispiel: U-Bahn in Sendai (1987)
    Steuerung der Anfahr- und Bremskurven
- präzise Erfassung des Unpräzisen:
  nicht durch Objekte (Elemente der Menge) definiert,
  sondern über den Grad der Zugehörigkeit zur Menge
- wichtiges Anwendungsfeld: Regelungstechnik

# Methoden der Regelung

- Regelung kann aufgefasst werden als Abbildung von einem Sensorraum auf Aktionen
- klassischer Lösungsansatz: Bestimmung einer Kontrollfunktion $\varphi : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \longrightarrow Y$ mit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto y$ ; $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – Messwerte, $y$ – Regelgröße
- es wird der Prozess modelliert
- physikalische Kenntnisse über den Prozess werden benötigt
- in vielen Fällen ist *a priori* nicht bekannt, welche Messgrößen besonders wichtig für die Auswahl von Aktionen sind
- manche Systeme sind nur sehr schwer mathematisch zu beschreiben

# Methoden der Regelung (cont.)

- oft sind die Sensordaten ungenau, verrauscht und/oder hochdimensional

- Das Erstellen einer optimalen Abbildung zwischen Sensorraum und Aktionen ist dann mit klassischen regelungstechnischen Methoden sehr schwierig.

  Alternative:
  - ein Mensch kann, obwohl er kein Wissen über Differentialgleichungen hat, trotzdem gehen

# Methoden der Regelung (cont.)

- ein Mensch kann ohne das Wissen über Differentialgleichungen gehen
  - er kann das Gleichgewicht halten, ohne zu wissen, wie der Prozess mathematisch modelliert wird
  - Idee: statt den Prozess selbst zu modellieren, soll das Verhalten eines Experten, der den Prozess regelt, modelliert und simuliert werden
- es wird also eine einfachere Methode zur Beschreibung benutzt (und/oder die Regelung passt sich an die Bedingungen an)
- Erstellen eines Modells für das Verhalten eines menschlichen „Regelungsexperten“ heißt **kognitive Analyse**
- Experte formuliert sein Wissen in Form linguistischer Regeln

# Fuzzy-Regelung

Kognitive Analyse liefert:

- ungenaue natürlichsprachliche Abstufungen von Begriffen wie „**Größe**", „**Schönheit**", „**Leistung**", „**Alter**" ...
- menschliche Denk- und Verhaltensmodelle auf der Grundlage der einstufigen Logik
  - *wenn-dann*-Regeln
- unscharfe Sprache statt numerischer Beschreibung
  - „Bremse 2.52 m vor der Kurve!" → nur in Maschinensystemen
  - „Bremse kurz vor der Kurve!" → in natürlicher Sprache

# Fuzzy-Regelung (cont.)

- Fuzzy-Regelung benutzt Fuzzy-Menge/Fuzzy-Logik als Mechanismus für
  - Behandlung von Problemen, die nicht einfach mit *ja* oder *nein* beantwortet werden können
  - Modellierung von (*soft*) Konzepten ohne scharfe Grenzen
  - Abstraktion von unnötigen/zu komplexen Details
  - „Computing with words“

# Charakteristische Funktion

**Scharfe Mengen** (analog zur klassischen Mengenlehre) lassen sich definieren durch Angabe ihrer charakteristischen Funktion:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A, \end{cases} \tag{30}$$

Der Zugehörigkeitsgrad $\mu_A(x)$ eines Elementes $x$ zu einer Menge $A$ aus einem Universum $X$ wird also hier beschrieben durch die Funktion: $\mu_A : X \to \{0, 1\}$.

# Zugehörigkeitsfunktion

Für **Fuzzy-Mengen** $A$ über einem Universum $X$ verwendet man eine verallgemeinerte charakteristische Funktion $\mu_A$, die jedem Element $x \in X$ eine reelle Zahl aus $[0,1]$ zuordnet:

$$\mu_A : X \to [0,1] \tag{31}$$

- die Funktion $\mu_A$ wird als Zugehörigkeitsfunktion (ZF) bezeichnet
- sie gibt den „Grad“ $\mu_A(x)$ an, mit dem das Element $x$ zur beschriebenen unscharfen Menge $A$ gehört

# Fuzzy-Menge

Eine **Fuzzy-Menge** $A$ ist gegeben durch ihre ZF $\mu_A$.

- eine Fuzzy-Menge $A$ über $X$ heißt leer , wenn gilt:

$$\mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

- eine Fuzzy-Menge $A$ über $X$ heißt universell , wenn gilt:

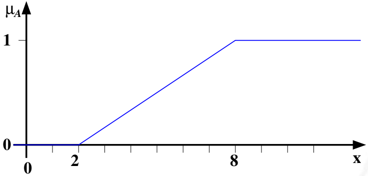
$$\mu_A(x) = 1 \quad \forall x \in X$$

- scharfe Mengen lassen sich als unscharfe Mengen mit den Zugehörigkeitsgraden 0 und 1 darstellen (vgl. (30),(31))
- Fuzzy-Menge und Zugehörigkeitsfunktion werden synonym benutzt ($A \mathrel{\hat{=}} \mu_A$)
- $\mathcal{F}(X)$ stellt die Menge aller Fuzzy-Mengen von X dar

$$\mathcal{F}(X) = \{\mu | \mu : X \rightarrow [0, 1]\} \tag{32}$$

# Fuzzy-Menge (cont.)

- Beschreibungsformen der Fuzzy-Mengen:
  - graphische Darstellung durch Vorgabe einer Kennlinie $\mu_A(x)$




Beispiel:
Fuzzy-Menge $A$

  - parametrische Darstellung, die den Verlauf der Kennlinie beschreibt

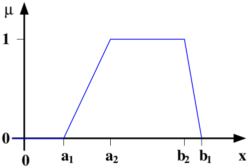
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 2 \\ \frac{x-2}{6} & \text{falls } x \geq 2 \textit{ und } x \leq 8 \\ 1 & \text{falls } x > 8 \end{cases}$$

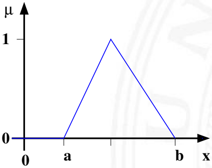
# Fuzzy-Menge (cont.)

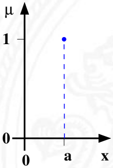
- Angabe diskreter Wertepaare $(\mu_A(x), x)$:
  (bei endlicher Universalmenge $X$)

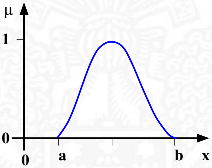
  $$A = \{(0,\ 0), (0,\ 1), (0,\ 2), (0.167,\ 3), (0.33,\ 4), \cdots (0.83,\ 7), (1.0,\ 8), (1,\ 9), (1,\ 10)\}$$

  Angabe häufig auch in Tabellenform
- Beispiele für Fuzzy-Mengen:



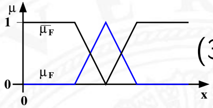



# Verknüpfung von Fuzzy-Mengen

elementare Verknüpfungen für Fuzzy-Mengen $A$ und $B$ nach L. A. Zadeh:

- Komplement:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{33}$$




- Vereinigung:

$$\mu_{A \cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{34}$$

- Durchschnitt:

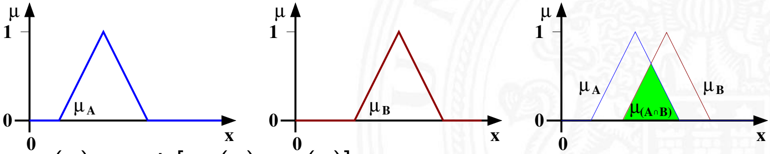
$$\mu_{A \cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{35}$$

# Verknüpfung von Fuzzy-Mengen (cont.)

- Eigenschaften eines verallgemeinerten Konjunktions-Operators

  t-Norm (triangular norm): $T{:}[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$
  - 1 ist neutrales Element: $T(a,1) = a$
  - Monotonie: $a < b \Longrightarrow T(a,c) \leq T(b,c)$
  - Kommutativität: $T(a,b) = T(b,a)$
  - Assoziativität: $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b),c)$

- Durchschnittsbildung nach Zadeh erfüllt Eigenschaften




$\mu_{A\cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$

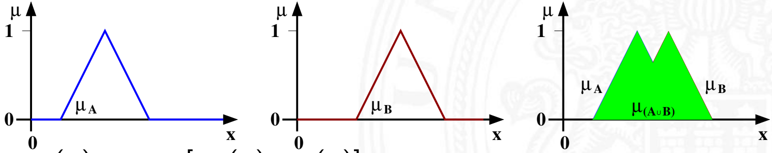
# Verknüpfung von Fuzzy-Mengen (cont.)

- Eigenschaften eines verallgemeinerten Disjunktions-Operators

  s-Norm (t-Conorm): S:$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$

  - 0 ist neutrales Element: $S(0,a) = a$
  - Monotonie: $a < b \Longrightarrow S(a,c) \leq S(b,c)$
  - Kommutativität: $S(a,b) = S(b,a)$
  - Assoziativität: $S(a, S(b,c)) = S(S(a,b),c)$

- Vereinigung nach Zadeh erfüllt Eigenschaften




$$\mu_{A\cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

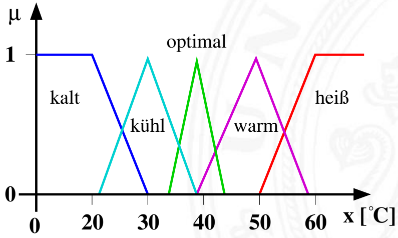
# Linguistische Variablen und Linguistische Terme

- Fuzzy-Mengen werden zumeist zur Modellierung **linguistischer Terme** eingesetzt (warm $\rightarrow$ [24°C – 36°C])
- ein *linguistischer Term (Wert, Label)* ist die Quantifizierung eines Begriffes der natürlichen Sprache durch eine Fuzzy-Menge
- eine **linguistische Variable** $V$ ist eine Variable, die eine Reihe linguistischer Terme annehmen kann (Außentemperatur $\rightarrow$ (kalt, kühl, angenehm, warm, heiß))
- $T(V)$ ist die Menge von Termen, die der linguistischen Variablen $V$ zugeordnet werden
- häufig fünf bis zehn linguistische Terme pro linguistischer Variable $(5 \leq \#T(V) \leq 10)$

# Linguistische Variablen und Linguistische Terme (cont.)

**Beispiel:**

- linguistische Variable: „**Badewassertemperatur**“
- linguistische Terme von „**Badewassertemperatur**“:
  „**kalt**“, „**kühl**“, „**optimal**“, „**warm**“, „**heiß**“



# Grundidee der Fuzzy-Regelung

- Beschreibung des gewünschten Reglerverhaltens mit Hilfe umgangssprachlicher, qualitativer **Regeln**
- Quantifizierung linguistischer Werte durch **Fuzzy-Mengen**
- Regel–Auswertung durch Verfahren der **Fuzzy-Logik** bzw. der Interpolation
- ein Fuzzy-Regler erhält scharfe Eingangsgrößen und liefert scharfe Ausgangsgrößen

# Fuzzy-Regeln

In einer Fuzzy-Regelung wird die Einflussnahme auf die dynamischen Verhältnisse eines Fuzzy-Systems durch eine Menge linguistischer Beschreibungsregeln in der folgenden Form charakterisiert

**IF** (eine Menge Konditionen werden erfüllt)
**THEN** (eine Menge Konsequenzen können bestimmt werden)

In den Prämissen (Antecedenten) vom IF-Teil:
linguistische Variablen aus der Domäne der Prozesszustände

In den Konklusionen (Konsequenten) vom THEN-Teil:
linguistische Variablen aus der Regelungsdomäne

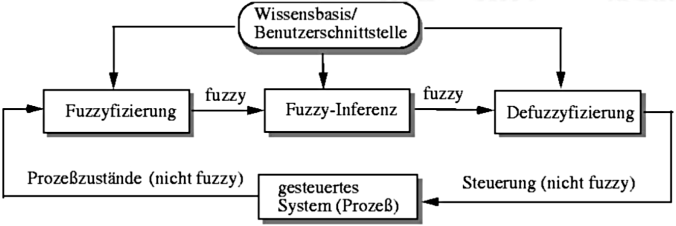
# Vorteile der Fuzzy-Regelung

- intelligente Regelung
- linguistische Regelung
  - Regelung ist transparent
  - ein Pluspunkt für Mensch-Maschine-Schnittstelle
- Reglerentwurf ohne besondere Modellkenntnisse möglich
- selbst, wenn mathem. Modell der Regelstrecke nicht bekannt ist, läßt sich das Verhalten mittels Regeln beschreiben
- Echtzeit-Anforderungen erfüllt
- Robustheit auch beim Einsatz von billigen Sensoren

# Komponenten der Fuzzy-Regelung

Ein kompletter Fuzzy-Controller besteht aus insgesamt vier Komponenten

- einer Wissensbasis
- einem Fuzzyfizierer
- einer Inferenz-Maschine
- und einem Defuzzyfizierer



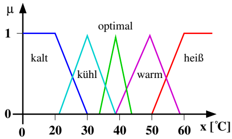
# Beispiel eines Fuzzy-Reglers

Regelung der Badewassertemperatur über die Zuführung kalten oder warmen Wassers.

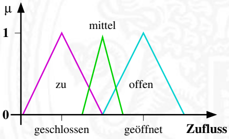
- Sensoren: Temperatursensor
- Stellglieder: Zulauf_kalt, Zulauf_warm
- Linguistische Variablen: $H_2O$temp (kalt, kühl, optimal, warm, heiß)

  Zul_kW (Terme: zu, mittel, offen)

  Zul_wW (Terme: zu, mittel, offen)




Temperatur

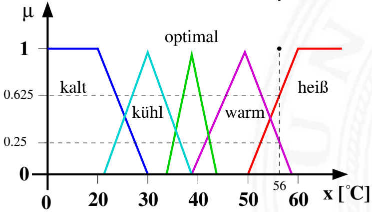



Zulauf

# Beispiel eines Fuzzy-Reglers (cont.)

Aktuelle Ausgabe des Temp-Sensors: 56 $^\circ\mathrm{C}$

- Fuzzifizierung
  - hier: Fuzzifizierung des Eingabewertes als Singleton
- Ermittlung des Zugehörigkeit der Fuzzy-Menge des Eingabewertes (hier Singleton) zu den Fuzzy-Mengen der Terme der linguistischen Variablen $H_2$Otemp nach Übereinstimmung:




- Vektor der Zugehörigkeitsgrade: (0.0, 0.0, 0.0, 0.25, 0.625)

# Beispiel eines Fuzzy-Reglers (cont.)

Regelbasis

| Nr. | WENN | DANN |
|---|---|---|
| 1. | $H_2$Otemp = „heiß“ | Zul_kW = „offen“, Zul_wW = „zu“ |
| 2. | $H_2$Otemp = „warm“ | Zul_kW = „mittel“, Zul_wW = „zu“ |
| 3. | $H_2$Otemp = „kühl“ | Zul_kW = „zu“, Zul_wW = „mittel“ |
| 4. | $H_2$Otemp = „kalt“ | Zul_kW = „zu“, Zul_wW = „offen “ |

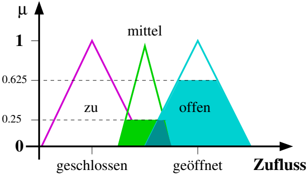
Regelauswertung mittels Max-Min Operators entsprechend Erfüllungsgrad:

- abschneiden der Terme der Ausgabevariablen auf Höhe des Erfüllungsgrades der entsprechenden Regeln (Min)
- Vereinigung der Terme der Ausgabevariablen (Max)

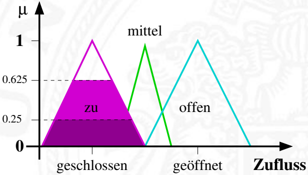
$H_2$Otemp: (kalt, kühl, optimal, warm, heiß) — (0.0, 0.0, 0.0, 0.25, 0.625)

# Beispiel eines Fuzzy-Reglers (cont.)

- Regel 1 zu 0,625 erfüllt $\longrightarrow$
  Term „offen" der Linguistischen Variable *Zul_kW* wird auf 0.625 begrenzt;
  Term „zu" der Linguistischen Variable *Zul_wW* wird auf 0.625 begrenzt
- Regel 2 zu 0,25 erfüllt $\longrightarrow$
  Term „mittel" der Linguistischen Variable *Zul_kW* wird auf 0.25 begrenzt:
  Term „zu" der Linguistischen Variable *Zul_wW* wird auf 0.25 egrenzt



*Zul_kW*

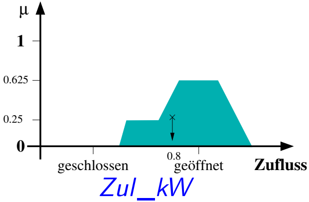


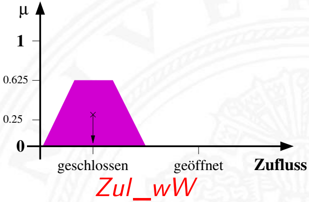
*Zul_wW*

# Beispiel eines Fuzzy-Reglers (cont.)

## Defuzzifizierung

- Defuzzifizierung hier mittels Schwerpunktbildung:



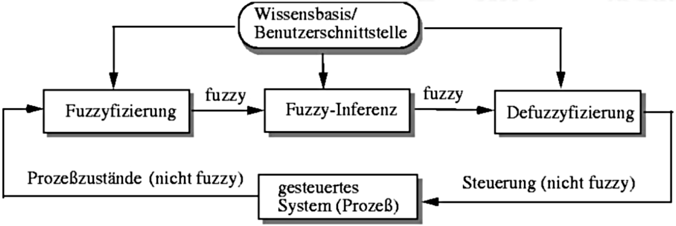




  - das Ventil Zulauf_kalt wird etwa zu 80% geöffnet
  - das Ventil Zulauf_warm bleibt geschlossen

# Komponenten der Fuzzy-Regelung

Ein kompletter Fuzzy-Controller besteht aus insgesamt vier Komponenten

- einer Wissensbasis
- einem Fuzzyfizierer
- einer Inferenz-Maschine
- und einem Defuzzyfizierer



# Wissensbasis

In der Wissensbasis ist das Expertenwissen abgelegt, auf das sich ein Fuzzy-System während einer Regelung stützt, das sind der

1. Vorrat der Zugehörigkeitsfunktionen des Fuzzyfizierers
   in rechner-internen Darstellungen,
2. die Zugehörigkeitsfunktionen,
   mit denen die linguistischen Terme der linguistischen Variablen (die Ein- und Ausgangsgrößen) mathematisch beschrieben werden und
3. die Regelungsstrategien,
   die in Form von *wenn-dann*-Regeln abgespeichert sind.
   (Achtung: Komplexität der Regelbasis beachten!)

# Wissensbasis (cont.)

zu 1., 2. Zugehörigkeitsfunktion:

- typisch: trianguläre oder trapezoide Zugehörigkeitsfunktionen
- modernere Systeme: „Gaussian“, „Cauchy“, „*sinc*“, „Hyperbolic Tangent“,...
- Problem: Alle Funktionen brauchen neben den Partitionspositionen (*Knoten*) weitere Parameter
- weil die Knoten ggf. das Ergebnis einer intrinsischen Partitionierung sind, ist die Wahl der übrigen Parameter weder natürlich noch intuitiv
- Linguistische Terme, die auf B-Spline Basisfunktionen beruhen, können allein auf Grundlage der Knoten gebildet werden und brauchen *keine* weiteren Parameter

# Wissensbasis (cont.)

zu 3. **Komplextät der Regelbasis**

- Regler ist bei $n$ Eingängen $x_n$ und einem Ausgang $y$ vollständig über einem $n$-dimensionalen Gitter definiert
- bei vollständig spezifiziertem Regelsystem mit einem Ausgang und $n$ Eingängen ($n$ linguistische Variablen) und $m$ linguistischen Termen pro Variable ergibt sich:

$$\#Regeln = m^n$$

  - Regelbasis hängt exponentiell von der Dimension des Eingangsraumes (Anzahl Eingangsvariablen) ab
  - nur für niedrigdimensionale Probleme geeignet
  - möglicht in Teilsysteme mit $\leq 3$ Eingangsvariablen zerlegen
- *Fluch der Dimensionalität!*

# Modellierung der Ein- bzw. Ausgabe:

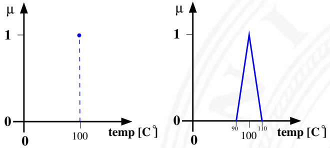
- alle Fuzzy-Controller setzen Fuzzy-Mengen zur Modellierung von linguistischen Termen für die Eingabe ein
- Eingabebereich wird überlappend partitioniert
- dies reflektiert die vage Modellierung durch linguistische Konzepte
- ein kontinuierlicher Übergang der Ausgabewerte wird ermöglicht

# Partitionierung der linguistischen Variablen

- linguistische Terme der linguistischen Variablen werden festgelegt
- jede Variable, hier z. B. $A$, wird mit Hilfe von Fuzzy-Mengen partitioniert
- auf $A$ werden so $t$ verschiedene Fuzzy-Mengen $A_1, \ldots, A_t$ definiert, mit Zugehörigkeitsfunktion:
  $\mu_1^A, \ldots, \mu_t^A \in \mathcal{F}(A)$; mit $\mathcal{F}(A)$ siehe:(32)
- jede dieser Mengen wird mit einem linguistischen Term assoziiert, (z. B. ($A_1$, kalt), ($A_2$, kühl), ($A_3$, optimal), ($A_4$, warm), ($A_5$, heiss))
  auch hier wird Fuzzy-Menge $A_i$ und ZF $\mu_i^A$ gerne synonym verwendet

# Fuzzyfizierer

- Der Fuzzyfizierer wandelt die „scharfen" Eingangsgrößen in Fuzzy-Mengen um.
- Die dafür vorgesehenen Zugehörigkeitsfunktionen werden dazu wie eine Hülle um den jeweiligen Eingangswert gelegt.




- Mit dem Fuzzyfizierer wird es möglich, Unschärfen der Eingangsgrößen, wie z.B. Fehlertoleranzen von Sensoren, zu berücksichtigen
(Beispiel oben rechts: Messungenauigkeit $\pm 10\%$).

# Inferenz-Maschine

- Inferenz ist ein Prozess, in dem aus vorhandemen Wissen (hier: Regelsystem) und neuem Wissen (hier: Messwerte) weiteres Wissen abgeleitet werden kann.
- Die Inferenz-Maschine vergleicht die fuzzyfizierten Eingangswerte mit den Zugehörigkeitsfunktionen der Antecedenten für jede Regel.
- Daraus schließt sie durch geeignete Verknüpfungen auf die Fuzzy-Mengen der Ausgangsvariablen (Konsequenten).
- Fuzzy-Inferenz lehnt sich an das logische Schließen der formalen Logik an.

# Inferenz-Maschine (cont.)

- Ein logischer Schluss beteht aus einer Menge von Prämissen $\{P_1, \ldots, P_n\}$, die als wahr vorausgesetzt werden, und einer Konklusion, deren Wahrheit notwendig aus der Wahrheit der Prämissen folgt.

  Beispiel:

  | | |
  |---|---|
  | Prämissen | wenn es regnet, dann wird der Acker nass |
  | | es regnet |
  | Konklusion | der Acker wird nass |

- Modus Ponens:
  eine auf der logischen Implikation basierende Schlussregel

  | | |
  |---|---|
  | Wenn $x$ gleich $A$, dann $y$ gleich $C$ | $A \Rightarrow C$ |
  | $x$ ist $A$ | $A$ |
  | $y$ ist $C$ | $\vdash C$ |

# Inferenz-Maschine (cont.)

- generalisierter Modus Ponens:
  - $A, A'$ Fuzzy-Mengen über $X$
  - $C, C'$ Fuzzy-Mengen über $Y$

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Wenn } x \text{ gleich } A\text{, dann } y \text{ gleich } C \\ x \text{ ist } A'\end{array}}{y \text{ ist } C'} \qquad \frac{\begin{array}{l}A \Rightarrow C \\ \mu_{A'}(x)\end{array}}{\vdash \mu_{C'}(y)}$$

Verteilung von $A$ und $A'$ müssen nicht übereinstimmen, um Schlussfolgerung zu treffen

# Inferenz-Maschine (cont.)

- Modus Ponens als Schlussregel für Fuzzy-Inferenz bei Verwendung klassischer Implikation problematisch:

  $((A \Rightarrow C) \wedge A) \Rightarrow C$ modus ponens

  | | | | |
  |---|---|---|---|
  | *mit* | $(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg A \vee C)$ | | Tautologie |
  | *und* | $\neg A$ | $\rightarrow 1 - \mu_A(x)$ | siehe (33) Komplement |
  | *und* | $A \vee C$ | $\rightarrow max\{\mu_A(x), \mu_C(y)\}$ | siehe (34) Vereinigung |

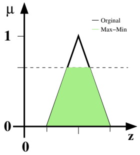
  *folgt* $A \Rightarrow C \rightarrow max\{1 - \mu_A(x), \mu_C(y)\}$ abgel. Implikation

  - falls jedoch $\mu_A(x) = 0$ wird Konklusion mit 1 bewertet
  - *ODER*-Verknüpfung von Regeln nicht möglich
- abgewandelte Implikation erforderlich, z.B.:
  - Mamdani-Implikation: $\mu_{A \Rightarrow C}(x, y) = min\{\mu_A(x), \mu_C(y)\}$
  - Larsen-Implikation: $\mu_{A \Rightarrow C}(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_C(y)$

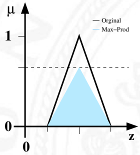
# Inferenz-Maschine (cont.)

- Für die mathematische Modellierung des Vergleichs und des Schlussfolgerns existieren viele Lösungsvorschläge
- z. B. basierend auf:
  - Mamdani-Implikation (Minimum)
  - Larsen-Implikation (algebraisches Produkt)

Max-Min-Inferenz



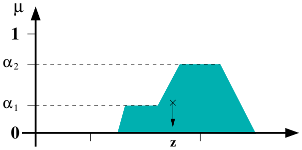

Max-Prod-Inferenz



# Defuzzifizierung

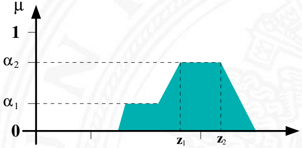
- Regelprozeß erfordert konkrete Stellgrößen für Aktuatoren
- aber: Fuzzy-Menge als Resultat der Fuzzy-Inferenz
- Generierung eines scharfen Ausgangswertes aus Fuzzy-Menge
- zwei Beispiele:

Schwerpunktmethode




- Schwerpunkt der Ausgangsfunktion bezüglich ihrer Abszisse

Maximummethode




- Regel mit max. Erfüllungsgrad
  - Mittelwert, linker, rechter Randpunkt

# Fuzzy-Regler mit mehreren Antecedenten

**Beispiel:** Gegeben sei ein Regelsystem mit zwei Antecedenten $A$ und $B$ und einer Konsequenten $C$:

$Regel_1$: IF ($x$ is $A_{i,1}$ and $y$ is $B_{j,1}$) THEN ($z$ is $C_1$)

$Regel_2$: IF ($x$ is $A_{i,2}$ and $y$ is $B_{j,2}$) THEN ($z$ is $C_2$)

$\vdots$

$Regel_k$: IF ($x$ is $A_{i,k}$ and $y$ is $B_{j,k}$) THEN ($z$ is $C_k$)

$\vdots$

$Regel_n$: IF ($x$ is $A_{i,n}$ and $y$ is $B_{j,n}$) THEN ($z$ is $C_n$)

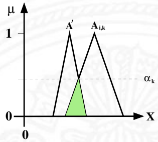
mit $A_{i,k}$: in Regel $k$ verwendeter Term $i$ der Variablen $A$
und $B_{j,k}$: in Regel $k$ verwendeter Term $j$ der Variablen $B$
und $C_k$: in in Regel $k$ verwendeter Term $k$ des Konsequenten $C$

# Inferenz-Maschine

## MAX-MIN-Inferenz

- die fuzzyfizierten Eingangsdaten $A'$ und $B'$ werden mit den $A_{i,k}$ und $B_{j,k}$ der $k$-ten Regel verglichen, und Ableitung der *Übereinstimmungsmaße* $\alpha_{A_k}$ und $\alpha_{B_k}$

$$\alpha_{A_k} = \sup_{x \in A'} (\min(A', A_{i,k}))$$
$$\alpha_{B_k} = \sup_{y \in B'} (\min(B', B_{j,k}))$$




- Verknüpfung der Übereinstimmungsmaße zu einem Gesamtmaß $\omega'_k$, das den Gesamt-Erfüllungsgrad der $k$-ten Regel angibt

$$\omega'_k = \min(\alpha_{A_k}, \alpha_{B_k})$$

# Inferenz-Maschine (cont.)

## MAX-MIN-Inferenz

- Der Erfüllungsgrad kann noch zusätzlich mit einem Regelgewicht $r_k \in [0, 1]$ multipliziert werden
- Regeln, die z.B. in Alarmfällen die Sicherheit gewährleisten sollen, können dadurch gegenüber anderen Regeln stärker gewichtet werden. Man erhält somit

$$\omega_k = r_k \cdot \omega'_k$$

- Die tatsächliche Schlussfolgerungsfunktion $C'_k$ des Konsequenten $C_k$ errechnet sich aus

$$C'_k = \min(\omega_k, C_k)$$

# Inferenz-Maschine (cont.)

## MAX-MIN-Inferenz

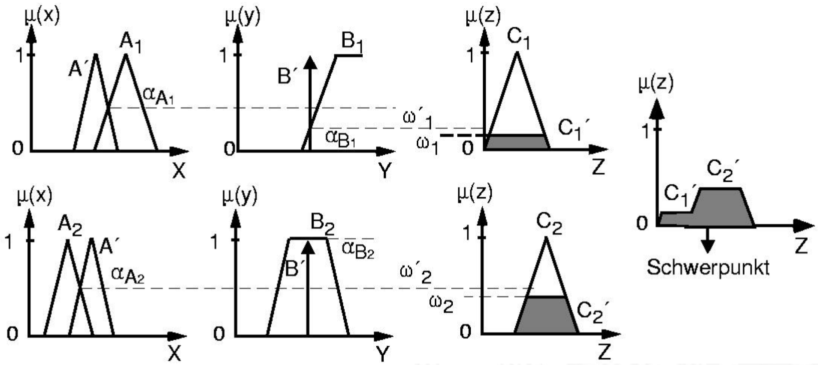
- Zuletzt fasst man alle Schlußfolgerungen $C'_k$ zusammen und erhält die Ausgangsfunktion $C$

$$C = \max(C'_1, C'_2, \ldots, C'_n)$$

- Bei Regelsystemen mit mehreren Ausgangsvariablen können die Ausgangsfunktionen unabhängig voneinander nach obigem Schema bestimmt werden

# Inferenz-Maschine (cont.)

## MAX-MIN-Inferenz



# Defuzzyfikation

- Um in einem Regelungsprozeß konkrete Stellgrößen an die Aktuatoren senden zu können, müssen aus den durch die Inferenz gewonnenen Ausgangsfunktionen „scharfe“ Ausgangswerte gebildet werden
- übliche Vorgehensweise ist die Schwerpunktmethode
  - Ausgangswert wird hierbei als Schwerpunkt der Ausgangsfunktion bezüglich ihrer Abszisse berechnet
  - andere Strategien z. B. Mittelwert-Max, MaxLeft, MaxRight,...

# Ein Fuzzy-Regler: Mamdani-Typ (MAX-MIN-Inferenz)

- nach Ebrahim Mamdani, London University, 1975 vorgestellt
- der klassische Fuzzy-Regler des Mamdani-Typs basiert auf einer endlichen Menge $\mathcal{R}$ symbolischer Regeln $R \in \mathcal{R}$:

  $$\begin{array}{lll} R_k: & \text{IF} & (x_1 \text{ is } A_{i_{1,k}}) \text{ and } (x_2 \text{ is } A_{i_{2,k}}) \text{ and } \ldots \text{and } (x_n \text{ is } A_{i_{n,k}}) \\ & \text{THEN} & y \text{ is } C_k \end{array}$$

  wobei $A_{i_{j,k}}$ den in Regel $k$ zu berücksichtigenden linguistischen Term $i$ der linguistischen Variablen $j$ bedeutet und $B_k$ eine Fuzzy-Menge mit den gleichen Eigenschaften wie im IF-Teil ist; mit $k = 1, \ldots, t$, und $t$ die Anzahl der Linguistischen Terme, die $y$ modellieren

# Ein Fuzzy-Regler: Mamdani-Typ (MAX-MIN-Inferenz) (cont.)

- erlaubt Expertenwissen intuitiv zu beschreiben; insbesondere aufbauend auf kognitive Analyse
- Kontrollregeln nicht als logische Implikation (modus ponens), sondern im Sinne einer stückweise definierten Funktion auffassen (Mamdani-Inferenz)
- die Teilprämissen einer Regel werden mit dem MIN-Operator zusammengefasst (UND-Verknüpfung); falls ODER-Verknüpfung enthalten, Regel splitten
- Zusammenfassen der Ausgabewerte aller aktiven Regeln geschieht mit dem *MAX*-Operator

# Probleme der Regler des Mamdani-Typs

- viele Freiheitsgrade beim Entwurf
  - Implikations-Relation
  - Inferenz-Mechanismen
  - Fuzzyfikation- und Defuzzyfikationsstrategie
- Auswahl und Quantifizierung der linguistischen Werte schwierig
  - keine systematischen Richtlinien $\Rightarrow$ Erfahrungswerte
- Auswirkung der Wahl der Zugehörigkeitsfunktions-Form
  - warum Dreiecke/Trapeze?
  - andere Funktionen?
- Bewertungskriterien für einen optimalen Regler
  - Glätte
  - Approximations-Genauigkeit
- Nachweis der Stabilität
  - aufwändig, wie bei fast allen nicht-linearen Systemen

    (z.B. Inverse Laplace-Transformation, Zustandsstabilität, Numerische zeitdiskrete Verfahren)

# Zusammenfassung Fuzzy-Controller

- Beschreibung einer Regelstrategie ohne Rückgriff auf ein mathematisches Modell
- wertvolle Erfahrung von Experten wird genutzt
- Fuzzy-Regelung benutzt Fuzzy-Menge/Fuzzy-Logik als Mechanismus für die Modellierung
  - von Problemen, die nicht einfach mit *ja* oder *nein* beantwortet werden können
  - von Konzepten ohne scharfe Grenzen
  - der Abstraktion von unnötigen/zu komplexen Details
  - vager linguistischer Konzepte
- erstaunlich robust beim Einsatz billiger Sensoren

# Zusammenfassung Fuzzy-Controller (cont.)

- gestörte Regelzustände, die nicht durch Regelbasis erfasst sind, können nicht abgefangen werden
- nur auf Regelaufgaben mit wenigen Eingangsgrößen direkt anwendbar

[Bie97] Benno Biewer:
*Fuzzy-Methoden*.
Springer-Verlag; Berlin, 1997

[BZ70] R.E. Bellman, L.A. Zadeh:
Decision-Making in a Fuzzy Environment.
In: *Management Science*
17 (1970)

[Lip06] Wolfram-Manfred Lippe:
*Soft-Computing mit Neuronalen Netzen, Fuzzy-Logic und Evolutionären Algorithmen*.
Springer-Verlag; Berlin, 2006

[Zad65] L.A. Zadeh:
Fuzzy Sets.
In: *Information Control*
8 (1965), S. 338–353