64-041 Übung Rechnerstrukturen

Aufgabenblatt 6   Ausgabe: 19.11., Abgabe: 26.11. 24:00

Gruppe	
Name(n)	Matrikelnummer(n)

Aufgabe 6.1   (Punkte 5+5)

Fano-Codierung: In der Vorlesung wurde die Fano-Codierung für die Urbildmenge $\{A, B, C, D\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\{0.45, 0.1, 0.15, 0.3\}$ entwickelt. Jemand kommt auf die Idee, statt der dort gewählten Aufteilung $\{A\}$ und $\{D, C, B\}$ die folgende zu wählen: $\{A, B\}$ und $\{C, D\}$, die ebenfalls die Bedingung erfüllt, dass die Wahrscheinlichkeiten möglichst gleichmäßig auf beide Mengen verteilt sind.

(a) Welche Codierung erhält man dann für die einzelnen Symbole und welche mittlere Codelänge ergibt sich?

(b) Was hat unser Jemand möglicherweise falsch verstanden?

Aufgabe 6.2   (Punkte 25)

Optimale Codierung: Die folgenden 12 Symbole a_i sind mit ihren Wahrscheinlichkeiten $p(a_i)$ in der Tabelle angegeben:

a_i	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$p(a_i)$	0,12	0,03	0,05	0,3	0,02	0,05	0,1	0,02	0,03	0,1	0,12	0,06

Bilden Sie einen Huffman-Baum und geben sie die zugehörige Codierung der Symbole an.

Aufgabe 6.3   (Punkte 5+5+5)

Informationstheorie: Wir betrachten einen Würfel.

(a) Geben Sie die Entropie an für einen Wurf mit dem unpräparierten Würfel, d.h. alle Zahlen treten gleich oft auf. (Formel und Zahlenwert).

(b) Die Würfel sei jetzt so präpariert, dass eine 6 mit der Wahrscheinlichkeit 0.25 auftritt und die anderen Zahlen mit der Wahrscheinlichkeit 0.15. Berechnen Sie wieder die Entropie.

(c) Was ist der größte Wert für die Entropie, der bei verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zahlen überhaupt auftreten kann? Es genügt die Angabe des Zahlenwerts, d.h. das Ergebnis muss nicht hergeleitet werden.

Aufgabe 6.4 (Punkte 10+5+5+10+5+15)

2D-Paritätscode: Wir betrachten den in der Vorlesung vorgestellten zweidimensionalen Paritätscode. Jeweils 64 Datenbits werden als Matrix mit 8×8 Zeilen und Spalten notiert, und zu jeder Zeile und Spalte wird ein gerades Paritätsbit hinzugefügt. Außerdem wird noch ein weiteres Bit ganz unten rechts bestimmt, dass sich als Paritätsbit der Spalten-Paritätsbits berechnet:

$$
\begin{array}{|cccccccc|c|}
\hline
d_{0,0} & d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} & d_{0,4} & d_{0,5} & d_{0,6} & d_{0,7} & p_{0,8} \\
d_{1,0} & d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & d_{1,5} & d_{1,6} & d_{1,7} & p_{1,8} \\
d_{2,0} & d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & d_{2,5} & d_{2,6} & d_{2,7} & p_{2,8} \\
d_{3,0} & d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & d_{3,5} & d_{3,6} & d_{3,7} & p_{3,8} \\
d_{4,0} & d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & d_{4,5} & d_{4,6} & d_{4,7} & p_{4,8} \\
d_{5,0} & d_{5,1} & d_{5,2} & d_{5,3} & d_{5,4} & d_{5,5} & d_{5,6} & d_{5,7} & p_{5,8} \\
d_{6,0} & d_{6,1} & d_{6,2} & d_{6,3} & d_{6,4} & d_{6,5} & d_{6,6} & d_{6,7} & p_{6,8} \\
d_{7,0} & d_{7,1} & d_{7,2} & d_{7,3} & d_{7,4} & d_{7,5} & d_{7,6} & d_{7,7} & p_{7,8} \\
\hline
p_{8,0} & p_{8,1} & p_{8,2} & p_{8,3} & p_{8,4} & p_{8,5} & p_{8,6} & p_{8,7} & p_{8,8} \\
\hline
\end{array}
$$

(a) Wie groß ist die Minimaldistanz d dieses Codes? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Können mit diesem Code alle Einbitfehler, Zweibitfehler, und Dreibitfehler erkannt und korrigiert werden? Warum?

(c) Geben Sie ein Beispiel für einen Vierbitfehler, der vom Code nicht erkannt wird.

(d) Angenommen, Sie empfangen folgende Bits. Wurden alle Bits korrekt übertragen? Wenn nein, welches Bit muss korrigiert werden?

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

(e) Wir verallgemeinern jetzt unseren Ansatz etwas. Sei $N = n^2$ die Anzahl der Datenbits, die zu übermitteln sind. Wie viele Bits werden dann bei unserer Vorgehensweise insgesamt übertragen?

(f) Was würden Sie tun, wenn die Anzahl N der Datenbits keine Quadratzahl, z.B. $N = 72$ oder $N = 58$, ist und Sie möglichst wenig Bits übertragen möchten, ohne die Vorteile unseres fehlerkorrigierenden Codes zu verlieren?