64-544
Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

http://tams.informatik.uni-hamburg.de/
lectures/2014ss/vorlesung/GdSR

Jianwei Zhang, Bernd Schütz

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Sommersemester 2014

Gliederung

1. Einführung
2. Grundlagen der Robotik
3. Grundlagen der Sensorik
4. Verarbeitung von Scandaten
5. Rekursive Zustandsschätzung
6. Fuzzy-Logik
7. Steuerungsarchitekturen

Agenda

6. Fuzzy-Logik
- Methoden der Regelung
- Fuzzy-Regelung
- Charakteristische Funktion / Zugehörigkeitsfunktion
- Fuzzy-Menge
- Linguistische Variablen und Terme
- Fuzzy-Regelung
- Literatur

Einführung in die Fuzzy-Regelung

- Lotfi A. Zadeh Begründer der Theorie der unscharfen Mengen (Fuzzy Sets, 1965)
  - Professor an der Universität Berkeley, Kalifornien seit 1959
  - Systemtheorie, Entscheidungstheorie, Informationssysteme
- Durchbruch der Fuzzy-Set-Theorie seit 1980er Jahren
  - insbesondere Japan
  - Beispiel: U-Bahn in Sendai (1987)
    Steuerung der Anfahr- und Bremskurven
- präzise Erfassung des Unpräzisen:
  nicht durch Objekte (Elemente der Menge) definiert,
  sondern über den Grad der Zugehörigkeit zur Menge
- wichtiges Anwendungsfeld: Regelungstechnik

Methoden der Regelung

- Regelung kann aufgefasst werden als Abbildung von einem Sensorraum auf Aktionen
- klassischer Lösungsansatz: Bestimmung einer Kontrollfunktion $\varphi : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \longrightarrow Y$ mit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto y$;
  $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – Messwerte, y – Regelgröße
- es wird der Prozess modelliert
- physikalische Kenntnisse über den Prozess werden benötigt
- in vielen Fällen ist *a priori* nicht bekannt, welche Messgrößen besonders wichtig für die Auswahl von Aktionen sind
- manche Systeme sind nur sehr schwer mathematisch zu beschreiben

Methoden der Regelung (cont.)

- oft sind die Sensordaten ungenau, verrauscht und/oder hochdimensional

- Das Erstellen einer optimalen Abbildung zwischen Sensorraum und Aktionen ist dann mit klassischen regelungstechnischen Methoden sehr schwierig.

  Alternative:
  - ein Mensch kann, obwohl er kein Wissen über Differentialgleichungen hat, trotzdem gehen

Methoden der Regelung (cont.)

- ein Mensch kann ohne das Wissen über Differentialgleichungen gehen
  - er kann das Gleichgewicht halten, ohne zu wissen, wie der Prozess mathematisch modelliert wird
  - Idee: statt den Prozess selbst zu modellieren, soll das Verhalten eines Experten, der den Prozess regelt, modelliert und simuliert werden
- es wird also eine einfachere Methode zur Beschreibung benutzt (und/oder die Regelung passt sich an die Bedingungen an)
- Erstellen eines Modells für das Verhalten eines menschlichen „Regelungsexperten" heißt **kognitive Analyse**
- Experte formuliert sein Wissen in Form linguistischer Regeln

Fuzzy-Regelung

Kognitive Analyse liefert:

- ungenaue natürlichsprachliche Abstufungen von Begriffen wie „**groß**“, „**schön**“, „**stark**“, „**jung**“, „**alt**“ . . .
- menschliche Denk- und Verhaltensmodelle auf der Grundlage der einstufigen Logik
  - **Auto fahren:** *wenn-dann*-Regeln
  - **Auto parken:** Genau auf den Millimeter? (Unschärfe gegeben)
- unscharfe Sprache statt numerischer Beschreibung
  - „Bremse 2.52 m vor der Kurve!“ → nur in Maschinensystemen
  - „Bremse kurz vor der Kurve!“ → in natürlicher Sprache

Fuzzy-Regelung (cont.)

- *Fuzzy* bedeutet: unscharf, vage, verschwommen, unklar, . . .
- wie lässt sich Unschärfe realisieren?

- Fuzzy-Regelung benutzt Fuzzy-Menge/Fuzzy-Logik als Mechanismus für
  - Behandlung von Problemen, die nicht einfach mit *ja* oder *nein* beantwortet werden können
  - Modellierung von (*soft*) Konzepten ohne scharfe Grenzen
  - Abstraktion von unnötigen/zu komplexen Details
  - „Computing with words“

Charakteristische Funktion

Scharfe Mengen (analog zur klassischen Mengenlehre) lassen sich definieren durch Angabe ihrer charakteristischen Funktion:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A, \end{cases}$$

Der Zugehörigkeitsgrad $\mu_A(x)$ eines Elementes x zu einer Menge A aus einem Universum X wird also hier beschrieben durch die Funktion: $\mu_A : X \to \{0, 1\}$.

Zugehörigkeitsfunktion

Für **Fuzzy-Mengen** A über einem Universum X verwendet man eine verallgemeinerte charakteristische Funktion μ_A, die jedem Element $x \in X$ eine reelle Zahl aus $[0, 1]$ zuordnet:

$$\mu_A : X \to [0, 1] \tag{28}$$

- die Funktion μ_A wird als Zugehörigkeitsfunktion (ZF) bezeichnet
- sie gibt den „Grad" $\mu_A(x)$ an, mit dem das Element x zur beschriebenen unscharfen Menge A gehört

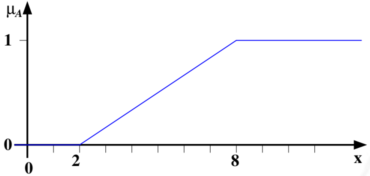
Fuzzy-Menge

Eine **Fuzzy-Menge** A ist gegeben durch ihre ZF μ_A.

- eine Fuzzy-Menge A über X heißt leer , wenn gilt:
$$\mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$$
- eine Fuzzy-Menge A über X heißt universell , wenn gilt:
$$\mu_A(x) = 1 \quad \forall x \in X$$
- scharfe Mengen lassen sich als unscharfe Mengen mit den Zugehörigkeitsgraden 0 und 1 darstellen
- Fuzzy-Menge und Zugehörigkeitsfunktion werden synonym benutzt ($A \widehat{=} \mu_A$)
- $\mathcal{F}(X)$ stellt die Menge aller Fuzzy-Mengen von X dar
$$\mathcal{F}(X) = \{\mu | \mu : X \rightarrow [0,1]\} \tag{29}$$

Fuzzy-Menge (cont.)

- Beschreibungsformen der Fuzzy-Mengen:
  - graphische Darstellung durch Vorgabe einer Kennlinie $\mu_A(x)$



Beispiel:
Fuzzy-Menge A

  - parametrische Darstellung, die den Verlauf der Kennlinie beschreibt

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 2 \\ \frac{x-2}{6} & \text{falls } x \geq 2 \textit{ und } x \leq 8 \\ 1 & \text{falls } x > 8 \end{cases}$$

Fuzzy-Menge (cont.)

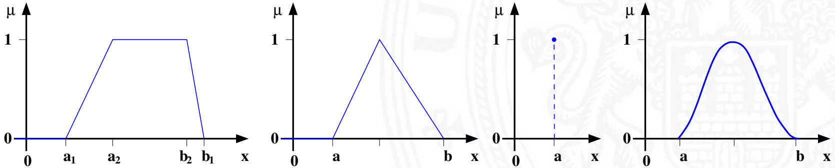
- Angabe diskreter Wertepaare $(\mu_A(x), x)$:
  (bei endlicher Universalmenge X)

  $$A = \{(0,\ 0), (0,\ 1), (0,\ 2), (0.167,\ 3), (0.33,\ 4), \cdots (0.83,\ 7), (1.0,\ 8), (1,\ 9), (1,\ 10)\}$$

  auch in kompakter Notation:

  $$A = 0/0 + 0/1 + 0/2 + 0.167/3 + 0.33/4 + \cdots + 0.83/7 + 1.0/8 + 1/9 + 1/10$$

  Angabe häufig auch in Tabellenform
- Beispiele für Fuzzy-Mengen:



Fuzzy-Menge (cont.)

Notation:

X endlich:
$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

X unendlich:
$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

Fuzzy-Menge (cont.)

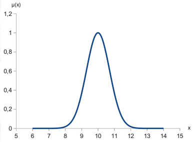
Beispiele:

- Die Menge der ganzen Zahlen, die ungefähr gleich 10 sind:

$$G_{10} = 0.1/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 1/10 + 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13$$

- Die Menge der reellen Zahlen, die ungefähr gleich 10 sind:

$$G_{10} = \int_{\Re} e^{-(x-10)^2} / x$$

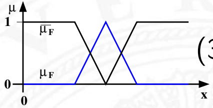


Verknüpfung von Fuzzy-Mengen

elementare Verknüpfungen für Fuzzy-Mengen A und B nach L. A. Zadeh:

- Komplement:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{30}$$



- Vereinigung:

$$\mu_{A \cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{31}$$

- Durchschnitt:

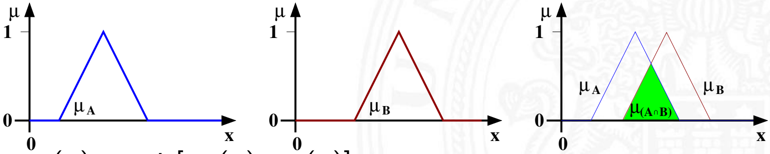
$$\mu_{A \cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{32}$$

Verknüpfung von Fuzzy-Mengen (cont.)

- Eigenschaften eines verallgemeinerten Konjunktions-Operators

  t-Norm (triangular norm): T:$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$
  - 1 ist neutrales Element: $T(a,1) = a$
  - Monotonie: $a < b \Longrightarrow T(a,c) \leq T(b,c)$
  - Kommutativität: $T(a,b) = T(b,a)$
  - Assoziativität: $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b),c)$

- Durchschnittsbildung nach Zadeh erfüllt Eigenschaften

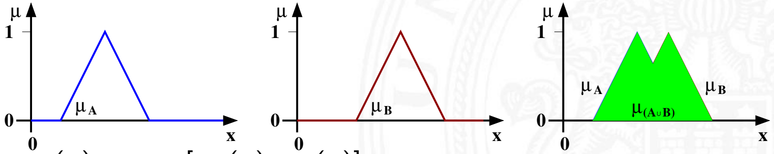


$\mu_{A \cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$

Verknüpfung von Fuzzy-Mengen (cont.)

- Eigenschaften eines verallgemeinerten Disjunktions-Operators

  s-Norm (t-Conorm): S:$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$
  - 0 ist neutrales Element: $S(0,a) = a$
  - Monotonie: $a < b \Longrightarrow S(a,c) \leq S(b,c)$
  - Kommutativität: $S(a,b) = S(b,a)$
  - Assoziativität: $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$
- Vereinigung nach Zadeh erfüllt Eigenschaften



$$\mu_{A\cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

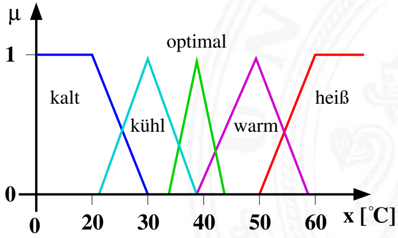
Linguistische Variablen und Linguistische Terme

- Fuzzy-Mengen werden zumeist zur Modellierung **linguistischer Terme** eingesetzt (warm $\rightarrow$ [24°C$-$36°C])
- ein *linguistischer Term (Wert, Label)* ist die Quantifizierung eines Begriffes der natürlichen Sprache durch eine Fuzzy-Menge
- eine **linguistische Variable** V ist eine Variable, die eine Reihe linguistischer Terme annehmen kann
  (Außentemperatur $\rightarrow$ (kalt, kühl, angenehm, warm, heiß))
- $T(V)$ ist die Menge von Termen, die der linguistischen Variablen V zugeordnet werden
- häufig fünf bis zehn linguistische Terme pro linguistischer Variable $(5 \leq \#T(V) \leq 10)$

Linguistische Variablen und Linguistische Terme (cont.)

Beispiel:

- linguistische Variable: „**Badewassertemperatur**“
  linguistische Terme von „**Badewassertemperatur**“:
  „**kalt**“, „**kühl**“, „**optimal**“, „**warm**“, „**heiß**“



Grundidee der Fuzzy-Regelung

- Beschreibung des gewünschten Reglerverhaltens mit Hilfe umgangssprachlicher, qualitativer **Regeln**
- Quantifizierung linguistischer Werte durch **Fuzzy-Mengen**
- Regel–Auswertung durch Verfahren der **Fuzzy-Logik** bzw. der Interpolation
- ein Fuzzy-Regler erhält scharfe Eingangsgrößen und liefert scharfe Ausgangsgrößen

Fuzzy-Regeln

In einer Fuzzy-Regelung wird die Einflussnahme auf die dynamischen Verhältnisse eines Fuzzy-Systems durch eine Menge linguistischer Beschreibungsregeln in der folgenden Form charakterisiert

IF (eine Menge Konditionen werden erfüllt)
THEN (eine Menge Konsequenzen können bestimmt werden)

In den Prämissen (Antecedenten) vom IF-Teil:
linguistische Variablen aus der Domäne der Prozesszustände

In den Konklusionen (Konsequenten) vom THEN-Teil:
linguistische Variablen aus der Regelungsdomäne

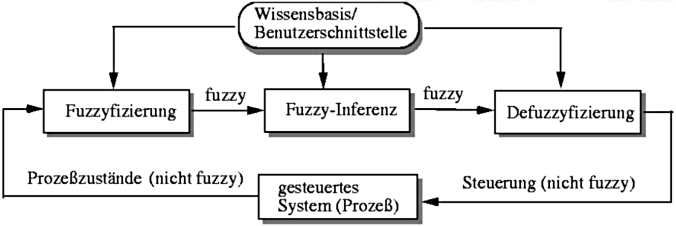
Vorteile der Fuzzy-Regelung

- intelligente Regelung
  - Verwendung von Expertenwissen
- linguistische Regelung
  - Regelung ist transparent
  - ein Pluspunkt für Mensch-Maschine-Schnittstelle
- Reglerentwurf ohne besondere Modellkenntnisse möglich
- selbst, wenn mathem. Modell der Regelstrecke nicht bekannt ist, läßt sich das Verhalten mittels Regeln beschreiben
- parallele Regelung
  - Modularisierung
  - hohe Verarbeitungsgeschwindigkeit
- Echtzeit-Anforderungen erfüllt
- Robustheit auch beim Einsatz von billigen Sensoren

Komponenten der Fuzzy-Regelung

Ein kompletter Fuzzy-Controller besteht aus insgesamt vier Komponenten

- einer Wissensbasis
- einem Fuzzyfizierer
- einer Inferenz-Maschine
- und einem Defuzzyfizierer



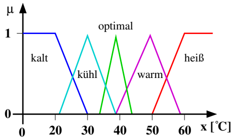
Beispiel eines Fuzzy-Reglers

Regelung der Badewassertemperatur über die Zuführung kalten oder warmen Wassers.

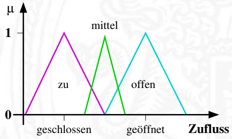
- Sensoren: Temperatursensor
- Stellglieder: Zulauf_kalt, Zulauf_warm
- Linguistische Variablen: H_2Otemp (kalt, kühl, optimal, warm, heiß)

  Zul_kW (Terme: zu, mittel, offen)

  Zul_wW (Terme: zu, mittel, offen)



Temperatur

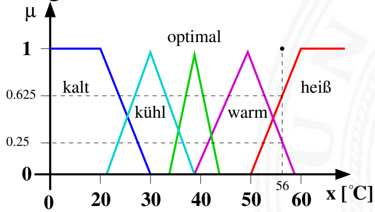


Zulauf

Beispiel eines Fuzzy-Reglers (cont.)

Aktuelle Ausgabe des Temp-Sensors: 56 $^\circ\mathrm{C}$

- Fuzzifizierung
  - hier: Fuzzifizierung des Eingabewertes als Singleton
- Ermittlung des Zugehörigkeitsgrades der Fuzzy-Menge des Eingabewertes (hier Singleton) mit den Fuzzy-Mengen der Terme der linguistischen Variablen H_2Otemp:



- Vektor der Zugehörigkeitsgrade: (0.0, 0.0, 0.0, 0.25, 0.625)

Beispiel eines Fuzzy-Reglers (cont.)

Regelbasis

Nr.	WENN	DANN
1.	H_2Otemp = „heiß“	Zul_kW = „offen“, Zul_wW = „zu“
2.	H_2Otemp = „warm“	Zul_kW = „mittel“, Zul_wW = „zu“
3.	H_2Otemp = „kühl“	Zul_kW = „zu“, Zul_wW = „mittel“
4.	H_2Otemp = „kalt“	Zul_kW = „zu“, Zul_wW = „offen “

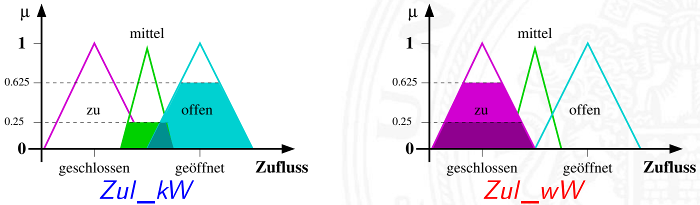
Regelauswertung mittels Max-Min Operators entsprechend Erfüllungsgrad:

- abschneiden der Terme der Ausgabevariablen auf Höhe des Erfüllungsgrades der entsprechenden Regeln (Min)
- Vereinigung der Terme der Ausgabevariablen (Max)

H_2Otemp: (kalt, kühl, optimal, warm, heiß) — (0.0, 0.0, 0.0, 0.25, 0.625)

Beispiel eines Fuzzy-Reglers (cont.)

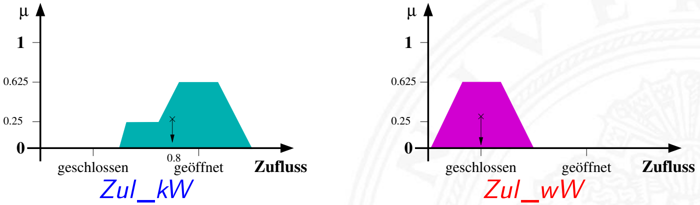
- Regel 1 zu 0,625 erfüllt $\longrightarrow$
  Term „offen“ der Linguistischen Variable *Zul_kW* wird auf 0.625 begrenzt;
  Term „zu“ der Linguistischen Variable *Zul_wW* wird auf 0.625 begrenzt
- Regel 2 zu 0,25 erfüllt $\longrightarrow$
  Term „mittel“ der Linguistischen Variable *Zul_kW* wird auf 0.25 begrenzt:
  Term „zu“ der Linguistischen Variable *Zul_wW* wird auf 0.25 egrenzt



Beispiel eines Fuzzy-Reglers (cont.)

Defuzzifizierung

- Defuzzifizierung hier mittels Schwerpunktbildung:

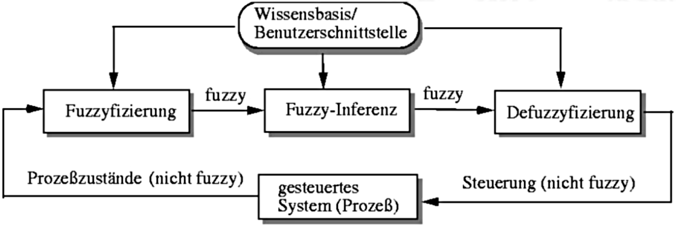


  - das Ventil Zulauf_kalt wird etwa zu 80% geöffnet
  - das Ventil Zulauf_warm bleibt geschlossen

Komponenten der Fuzzy-Regelung

Ein kompletter Fuzzy-Controller besteht aus insgesamt vier Komponenten

- einer Wissensbasis
- einem Fuzzyfizierer
- einer Inferenz-Maschine
- und einem Defuzzyfizierer



Wissensbasis

In der Wissensbasis ist das Expertenwissen abgelegt, auf das sich ein Fuzzy-System während einer Regelung stützt, das sind der

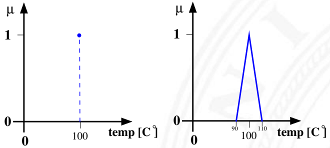
1. Vorrat der Zugehörigkeitsfunktionen des Fuzzyfizierers
   in rechner-internen Darstellungen,
2. die Zugehörigkeitsfunktionen,
   mit denen die linguistischen Terme der linguistischen Variablen (die Ein- und Ausgangsgrößen) mathematisch beschrieben werden und
3. die Regelungsstrategien,
   in Form von *wenn-dann*-Regeln abgespeichert.

Partitionierung

- linguistische Terme der linguistischen Variablen werden festgelegt
- jede Variable, hier z. B. A, wird mit Hilfe von Fuzzy-Mengen partitioniert
- auf A werden so t verschiedene Fuzzy-Mengen $A_1, \ldots, A_t$ definiert, mit Zugehörigkeitsfunktion:
  $$\mu_1^A, \ldots, \mu_t^A \in \mathcal{F}(A); \qquad \text{mit } \mathcal{F}(A) \text{ siehe:} (29)$$
- jede dieser Mengen wird mit einem linguistischen Term assoziiert, (z. B. (A_1, kalt), (A_2, kühl), (A_3, optimal), (A_4, warm), (A_5, heiss))
  auch hier wird Fuzzy-Menge A_i und ZF μ_i^A gerne synonym verwendet

Fuzzyfizierer

- Der Fuzzyfizierer wandelt die „scharfen“ Eingangsgrößen in Fuzzy-Mengen um.
- Die dafür vorgesehenen Zugehörigkeitsfunktionen werden dazu wie eine Hülle um den jeweiligen Eingangswert gelegt.



- Mit dem Fuzzyfizierer wird es möglich, Unschärfen der Eingangsgrößen, wie z.B. Fehlertoleranzen von Sensoren, zu berücksichtigen
(Beispiel oben rechts: Messungenauigkeit $\pm 10\%$).

Inferenz-Maschine

- Inferenz ist ein Prozess, in dem aus vorhandemen Wissen (hier: Regelsystem) und neuem Wissen (hier: Messwerte) weiteres Wissen abgeleitet werden kann.
- Die Inferenz-Maschine vergleicht die fuzzyfizierten Eingangswerte mit den Zugehörigkeitsfunktionen der Antecedenten für jede Regel.
- Daraus schließt sie durch geeignete Verknüpfungen auf die Fuzzy-Mengen der Ausgangsvariablen (Konsequenten).
- Fuzzy-Inferenz lehnt sich an das logische Schließen der formalen Logik an.

Inferenz-Maschine (cont.)

- Ein logischer Schluss beteht aus einer Menge von Prämissen $\{P_1, \ldots, P_n\}$, die als wahr vorausgesetzt werden, und einer Konklusion, deren Wahrheit notwendig aus der Wahrheit der Prämissen folgt.

  Beispiel:

Prämissen	wenn es regnet, dann wird der Acker nass
	es regnet
Konklusion	der Acker wird nass

- Modus Ponens:
  eine auf der logischen Implikation basierende Schlussregel

  Wenn x gleich A, dann y gleich C
  x ist A
  y ist C

  $$\begin{array}{l} A \Rightarrow C \\ A \\ \hline \vdash C \end{array}$$

Inferenz-Maschine (cont.)

- generalisierter Modus Ponens:
  - A, A' Fuzzy-Mengen über X
  - C, C' Fuzzy-Mengen über Y

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Wenn } x \text{ gleich } A, \text{ dann } y \text{ gleich } C \\ x \text{ ist } A'\end{array}}{y \text{ ist } C'} \qquad \frac{\begin{array}{l}A \Rightarrow C \\ \mu_{A'}(x)\end{array}}{\vdash \mu_{C'}(y)}$$

Verteilung von A und A' müssen nicht übereinstimmen, um Schlussfolgerung zu treffen

Inferenz-Maschine (cont.)

- Modus Ponens als Schlussregel für Fuzzy-Inferenz bei Verwendung klassischer Implikation problematisch:
  $((A \Rightarrow C) \wedge A) \Rightarrow C$ modus ponens

  $$\begin{array}{lll} \textit{mit} & (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg A \vee C) & \text{Tautologie} \\ \textit{und} & \neg A \quad \rightarrow 1 - \mu_A(x) & \text{siehe (30) Komplement} \\ \textit{und} & A \vee C \quad \rightarrow max\{\mu_A(x), \mu_C(y)\} & \text{siehe (31) Vereinigung} \end{array}$$

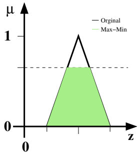
  $$\textit{folgt} \;\; A \Rightarrow C \rightarrow max\{1 - \mu_A(x), \mu_C(y)\} \qquad \text{abgel. Implikation}$$

  - falls jedoch $\mu_A(x) = 0$ wird Konklusion mit 1 bewertet
  - *ODER*-Verknüpfung von Regeln nicht möglich
- abgewandelte Implikation erforderlich, z.B.:
  - Mamdani-Implikation: $\mu_{A \Rightarrow C}(x, y) = min\{\mu_A(x), \mu_C(y)\}$
  - Larsen-Implikation: $\mu_{A \Rightarrow C}(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_C(y)$

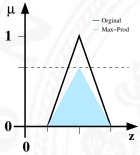
Inferenz-Maschine (cont.)

- Für die mathematische Modellierung des Vergleichs und des Schlussfolgerns existieren viele Lösungsvorschläge
- z. B. basierend auf:
  - Mamdani-Implikation (Minimum)
  - Larsen-Implikation (algebraisches Produkt)

Max-Min-Inferenz



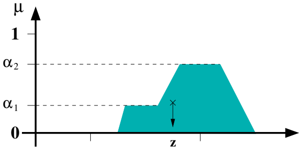
Max-Prod-Inferenz



Defuzzifizierung

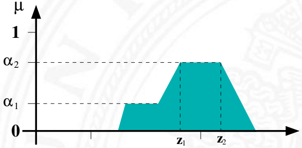
- Regelprozeß erfordert konkrete Stellgrößen für Aktuatoren
- aber: Fuzzy-Menge als Resultat der Fuzzy-Inferenz
- Generierung eines scharfen Ausgangswertes aus Fuzzy-Menge
- zwei Beispiele:

Schwerpunktmethode



- Schwerpunkt der Ausgangsfunktion bezüglich ihrer Abszisse

Maximummethode



- Regel mit max. Erfüllungsgrad
  - Mittelwert, linker, rechter Randpunkt

Fuzzy-Regler

Beispiel: Gegeben sei ein Regelsystem mit zwei Antecedenten A und B und einer Konsequenten C:

$Regel_1$: IF (x is $A_{i,1}$ and y is $B_{j,1}$) THEN (z is C_1)

$Regel_2$: IF (x is $A_{i,2}$ and y is $B_{j,2}$) THEN (z is C_2)

$\vdots$

$Regel_k$: IF (x is $A_{i,k}$ and y is $B_{j,k}$) THEN (z is C_k)

$\vdots$

$Regel_n$: IF (x is $A_{i,n}$ and y is $B_{j,n}$) THEN (z is C_n)

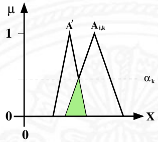
mit $A_{i,k}$: in Regel k verwendeter Term i der Variablen A
und $B_{j,k}$: in Regel k verwendeter Term j der Variablen B
und C_k: in in Regel k verwendeter Term k des Konsequenten C

Inferenz-Maschine

MAX-MIN-Inferenz

- die fuzzyfizierten Eingangsdaten A' und B' werden mit den $A_{i,k}$ und $B_{j,k}$ der k-ten Regel verglichen, und Ableitung der *Übereinstimmungsmaße* α_{A_k} und α_{B_k}

$$\alpha_{A_k} = \sup_{x \in X}(\min(A', A_{i,k}))$$
$$\alpha_{B_k} = \sup_{y \in y}(\min(B', B_{j,k}))$$



- Verknüpfung der Übereinstimmungsmaße zu einem Gesamtmaß ω'_k, das den Gesamt-Erfüllungsgrad der k-ten Regel angibt

$$\omega'_k = \min(\alpha_{A_k}, \alpha_{B_k})$$

Inferenz-Maschine (cont.)

MAX-MIN-Inferenz

- Der Erfüllungsgrad kann noch zusätzlich mit einem Regelgewicht $r_k \in [0, 1]$ multipliziert werden
- Regeln, die z.B. in Alarmfällen die Sicherheit gewährleisten sollen, können dadurch gegenüber anderen Regeln stärker gewichtet werden. Man erhält somit

$$\omega_k = r_k \cdot \omega'_k$$

- Die tatsächliche Schlussfolgerungsfunktion C'_k des Konsequenten C_k errechnet sich aus

$$C'_k = \min(\omega_k, C_k)$$

Inferenz-Maschine (cont.)

MAX-MIN-Inferenz

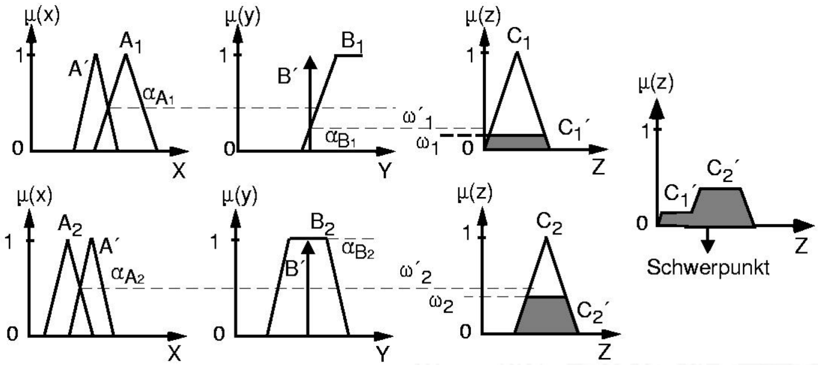
- Zuletzt fasst man alle Schlußfolgerungen C'_k zusammen und erhält die Ausgangsfunktion C

$$C = \max(C'_1, C'_2, \ldots, C'_n)$$

- Bei Regelsystemen mit mehreren Ausgangsvariablen können die Ausgangsfunktionen unabhängig voneinander nach obigem Schema bestimmt werden

Inferenz-Maschine (cont.)

MAX-MIN-Inferenz



Defuzzyfikation

- Um in einem Regelungsprozeß konkrete Stellgrößen an die Aktuatoren senden zu können, müssen aus den durch die Inferenz gewonnenen Ausgangsfunktionen „scharfe" Ausgangswerte gebildet werden
- übliche Vorgehensweise ist die Schwerpunktmethode
  - Ausgangswert wird hierbei als Schwerpunkt der Ausgangsfunktion bezüglich ihrer Abszisse berechnet
  - andere Strategien z. B. Mittelwert-Max, MaxLeft, MaxRight,...

Ein Fuzzy-Regler: Mamdani-Typ (MAX-MIN-Inferenz)

- nach Ebrahim Mamdani, London University, 1975 vorgestellt
- der klassische Fuzzy-Regler des Mamdani-Typs basiert auf einer endlichen Menge $\mathcal{R}$ symbolischer Regeln $R \in \mathcal{R}$:

  $$\begin{array}{lll} R_k: & \text{IF} & (x_1 \text{ is } A_{i_{1,k}}) \text{ and } (x_2 \text{ is } A_{i_{2,k}}) \text{ and } \ldots \text{and } (x_n \text{ is } A_{i_{n,k}}) \\ & \text{THEN} & y \text{ is } C_k \end{array}$$

  wobei $A_{i_{j,k}}$ den in Regel k zu berücksichtigenden linguistischen Term i der linguistischen Variablen j bedeutet und B_k eine Fuzzy-Menge mit den gleichen Eigenschaften wie im IF-Teil ist; mit $k = 1, \ldots, t$, und t die Anzahl der Linguistischen Terme, die y modellieren

Ein Fuzzy-Regler: Mamdani-Typ (MAX-MIN-Inferenz) (cont.)

- erlaubt Expertenwissen intuitiv zu beschreiben; insbesondere aufbauend auf kognitive Analyse
- Kontrollregeln nicht als logische Implikation (modus ponens), sondern im Sinne einer stückweise definierten Funktion auffassen (Mamdani-Inferenz)
- die Teilprämissen einer Regel werden mit dem MIN-Operator zusammengefasst (UND-Verknüpfung); falls ODER-Verknüpfung enthalten, Regel splitten
- Zusammenfassen der Ausgabewerte aller aktiven Regeln geschieht mit dem *MAX*-Operator

Probleme der Regler des Mamdani-Typs

- viele Freiheitsgrade beim Entwurf
  - Implikations-Relation
  - Inferenz-Mechanismen
  - Fuzzyfikation- und Defuzzyfikationsstrategie
- Auswahl und Quantifizierung der linguistischen Werte schwierig
  - keine systematischen Richtlinien $\Rightarrow$ Erfahrungswerte
- Auswirkung der Wahl der Zugehörigkeitsfunktions-Form
  - warum Dreiecke/Trapeze?
  - andere Funktionen?
- Bewertungskriterien für einen optimalen Regler
  - Glätte
  - Approximations-Genauigkeit
- Nachweis der Stabilität
  - aufwändig, wie bei fast allen nicht-linearen Systemen

    (z.B. Inverse Laplace-Transformation, Zustandsstabilität, Numerische zeitdiskrete Verfahren)

Zusammenfassung Fuzzy-Controller

Modellierung der Ein- bzw. Ausgabe:

- alle Fuzzy-Controller setzen Fuzzy-Mengen zur Modellierung von linguistischen Termen für die Eingabe ein
- Eingabebereich wird überlappend partitioniert
- dies reflektiert die vage Modellierung durch linguistische Konzepte
- ein kontinuierlicher Übergang der Ausgabewerte wird ermöglicht

Zusammenfassung Fuzzy-Controller (cont.)

IF-Teil:

- IF-Teil einer Regel wird folgendermaßen modelliert:

  $$(x_1 \text{ is } A_{i_{1,k}}) \text{ and } (x_2 \text{ is } A_{i_{2,k}}) \text{ and } \ldots (x_n \text{ is } A_{i_{n,k}})$$

  wobei x_j die j-te Eingabe ($j = 1, \ldots, n$) und $A_{i_{j,k}}$ der i-te linguistische Term mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ der Permutation k (Regel k) der Variablen j ist
- „und“-Operation wird als so genannte t-Norm implementiert
- in den meisten Anwendungen handelt es sich dabei um eine Minimum- oder Produkt-Operation

Zusammenfassung Fuzzy-Controller (cont.)

Zugehörigkeitsfunktion:

- typisch: trianguläre oder trapezoide Zugehörigkeitsfunktionen
- modernere Systeme: „Gaussian“, „Cauchy“, „*sinc*“, „Hyperbolic Tangent“,...
- Problem: Alle Funktionen brauchen neben den Partitionspositionen (*Knoten*) weitere Parameter
- weil die Knoten ggf. das Ergebnis einer intrinsischen Partitionierung sind, ist die Wahl der übrigen Parameter weder natürlich noch intuitiv
- Linguistische Terme, die auf B-Spline Basisfunktionen beruhen, können allein auf Grundlage der Knoten gebildet werden und brauchen *keine* weiteren Parameter

Zusammenfassung Fuzzy-Controller (cont.)

Komplexität

- Regler ist bei n Eingängen x_n und einem Ausgang y vollständig über einem n-dimensionalen Gitter definiert
- bei vollständig spezifiziertem Regelsystem mit einem Ausgang und n Eingängen (n linguistische Variablen) und m linguistischen Termen pro Variable ergibt sich:

$$\#Regeln = m^n$$

  - Regelbasis hängt exponentiell von der Dimension des Eingangsraumes ab
  - nur für niedrigdimensionale Probleme geeignet
- *Fluch der Dimensionalität!*

[Bie97] Benno Biewer:
Fuzzy-Methoden.
Springer-Verlag; Berlin, 1997

[BZ70] R.E. Bellman, L.A. Zadeh:
Decision-Making in a Fuzzy Environment.
In: *Management Science*
17 (1970)

[Lip06] Wolfram-Manfred Lippe:
Soft-Computing mit Neuronalen Netzen, Fuzzy-Logic und Evolutionären Algorithmen.
Springer-Verlag; Berlin, 2006

[Zad65] L.A. Zadeh:
Fuzzy Sets.
In: *Information Control*
8 (1965), S. 338–353