64-544
Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2014ss/vorlesung/GdSR

Jianwei Zhang, Bernd Schütz

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Sommersemester 2014

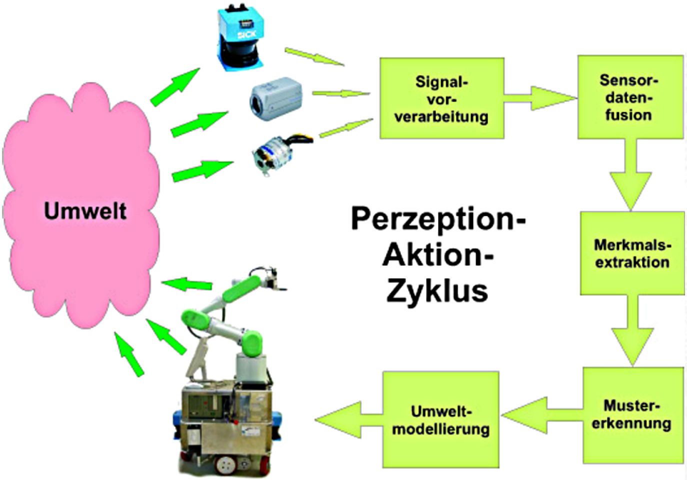
Gliederung

Agenda

Sensoren in der Robotik

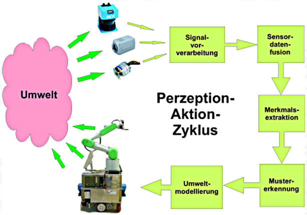
- Der Sensoreinsatz gewinnt bei der Entwicklung autonomer und intelligenter Robotersysteme zunehmend an Bedeutung.
- Dabei steht der Perzeption-Aktion-Zyklus im Vordergrund.
- Hierbei wird die Umwelt über Sensoren wahrgenommen und das Verhalten adaptiv verändert.
- Vor allem bei der interaktiven Zusammenarbeit mit Robotersystemen ist das situierte Verändern von Arbeitsabläufen erforderlich.

Perzeption-Aktion-Zyklus



Perzeption-Aktion-Zyklus (cont.)

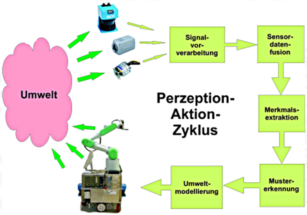
1. **Datenerfassung:** Die Sensoren erfassen die Stimuli und geben ein analoges oder digitales Signal aus.
2. **Signalvorverarbeitung:** Filtern, Normieren, usw.
3. **Sensordatenfusion:** Redundante oder mehrdimensionale Sensordaten werden zusammengefasst, um robustere Messdaten zu erhalten.



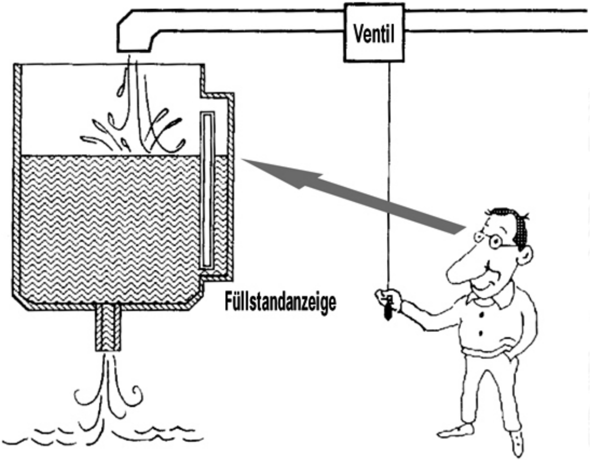
4. **Merkmalsextraktion:** Für die technische Realisierung biologischer/menschlicher Wahrnehmung werden Merkmale berechnet, die die Perzeption mathematisch beschreiben.

Perzeption-Aktion-Zyklus (cont.)

5. **Mustererkennung:** Auf den extrahierten Merkmalen werden Muster gesucht (Klassifikation).
6. **Umweltmodellierung:** Mit den Mustern wird Umgebung und Umwelt des Roboters modelliert.
7. **Manipulation:** Auf Basis des Modells werden Aktionen durchgeführt, mit denen der Roboter die Umwelt verändert.



Ein einfaches Beispiel

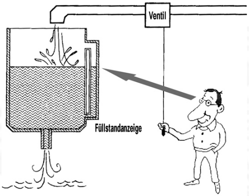


Was ist ein Sensor?

Der Sensor besteht aus zwei Teilen:

- der Füllstandanzeige und
- dem menschlichen Auge,

das ein Signal an das Gehirn sendet.



Definition

Ein Sensor ist eine Einheit, die ein Signal oder Stimulus

- empfängt
- und darauf reagiert.

Natürliche und physikalische Sensoren

Natürliche Sensoren:

- Reaktion ist elektrochemisches Signal auf Nervenbahnen
- **Beispiele:** Hören, Sehen, Tasten, ...

Physikalische Sensoren:

Definition

Ein physikalischer Sensor ist eine Einheit, die eine physikalische Größe (Signal oder Stimulus)

- empfängt
- und darauf mit einem *(elektrischen) Signal* reagiert.

Eingangssignal

- Ein Sensor wandelt ein (grundsätzlich) nicht-elektrisches Signal in ein elektrisches um.
- Dieses Signal wird als Stimulus bezeichnet.

Definition

Ein Stimulus ist eine

- Größe,
- Eigenschaft oder
- Beschaffenheit,

die wahrgenommen und in ein elektrisches Signal umgewandelt wird.

Ausgangssignal

- Das Ausgangssignal eines elektrischen Sensors kann bestimmt sein durch:
  - Spannung,
  - Strom oder
  - Ladung.

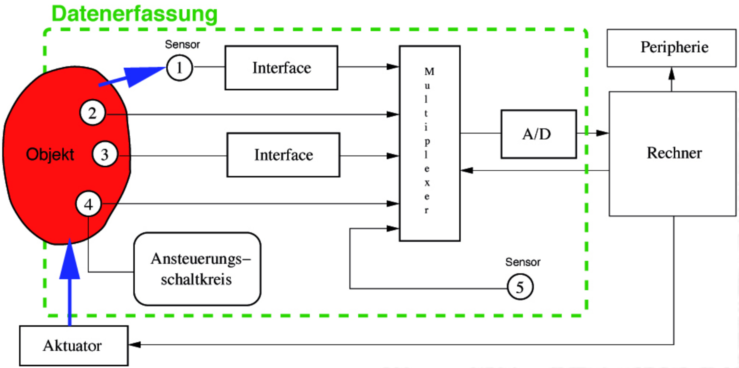
- Es kann weiter unterscheidbar sein durch:
  - Amplitude,
  - Frequenz oder
  - Phase.

Sensortypen

- extrinsisch:
  ermitteln von Informationen über die *Systemumgebung*
- intrinsisch:
  ermitteln von Informationen über den *internen Systemzustand*

- aktiv:
  variieren *angelegtes elektrisches Signal* bei Veränderung des Stimulus
- passiv:
  erzeugen *direkt* ein elektrisches Signal bei Veränderung des Stimulus

Def. von aktiv/passiv nach Bosch, wie in der Fahrzeugelektronik üblich; aber Achtung: die traditionelle Def. lautet entgegengesetzt.



Sensortypen:	
1.: extrinsisch, passiv	2. und 3.: intrinsisch, passiv
4.: intrinsisch, aktiv	5.: intrinsisch (in der Datenerfassung), passiv

Multiplexer (MUX)

- Schalter bzw. Weiche
- verbindet analoge Signale einzeln mit dem A/D-Wandler
- Vorteil: nur ein A/D-Wandler notwendig
- Rechner steuert den MUX
  (Auswahl des durchzuschaltenden Eingangs)

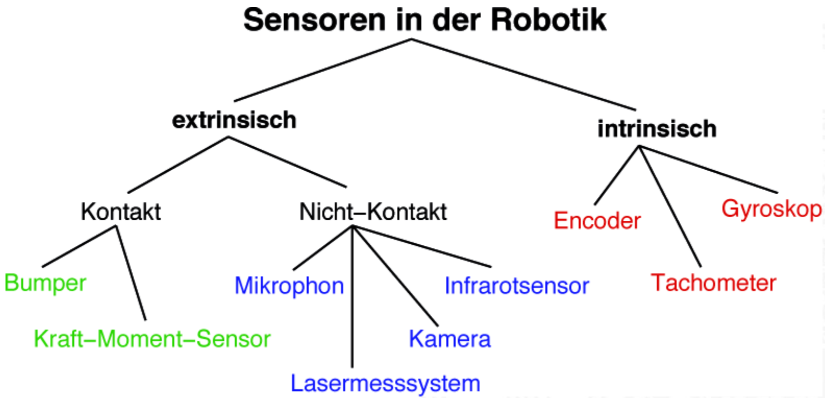
Digitale Sensorausgaben können auch direkt an den Rechner gehen

Sensorklassifikation

Klassifikation von Sensoren anhand von:

- Art des Stimulus
- Eigenschaften, Spezifikation und Parameter,
- Art wie Stimulus detektiert wird
- Art der Umwandlung von Stimulus in Ausgangssignal
- Material des Sensors
- Einsatzgebiet

Beispiel-Klassifikation



Agenda

Messen mit Sensoren

- wichtiges wissenschaftliches Kriterium: *Reproduzierbarkeit*
  - wissenschaftliche Aussagen müssen vergleichbar sein
  - Aussagen müssen *quantitativ* sein, sie müssen auf Messungen beruhen
- Messergebnis besteht aus:
  - Maßeinheit
  - Zahlenwert
  - zusätzlich: Angabe der Genauigkeit der Messung

Messfehler

Es gibt keinen Messprozess, der ein fehlerloses, absolut genaues Ergebnis liefert!

Messabweichung (Messfehler)

Systematische Abweichung („systematischer Fehler"):

- Abweichung wird durch den Sensor verursacht
- z.B.: falsche Eichung/Kalibrierung, dauernd vorhandene Störungen wie Reibung
- schwer zu erkennen und nur durch sorgfältiges Untersuchen der Fehlerquelle zu beseitigen

Zufällige Abweichung („zufälliger oder statistischer Fehler"):

- Abweichung wird durch unvermeidbare, regellose Störungen (Rauschen) verursacht
- bei wiederholter Messung weichen Einzelergebnisse voneinander ab
- Einzelergebnisse schwanken um einen Mittelwert

Fehlerangabe

- eine Messung ist stets mit Unsicherheit behaftet

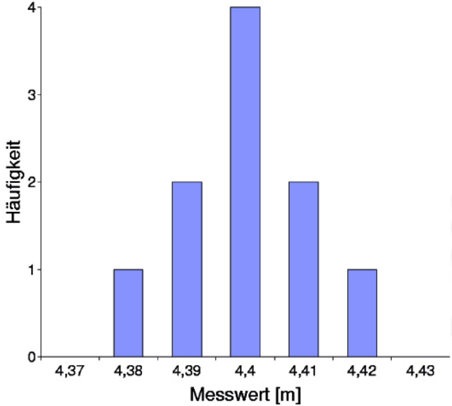
- **Beispiel:** Entfernungsmessung
  - Abstand zu einem Objekt wird mehrmals gemessen

Einzelergebnisse der Messung:				
$4,40\ m$	$4,40\ m$	$4,38\ m$	$4,41\ m$	$4,42\ m$
$4,39\ m$	$4,40\ m$	$4,39\ m$	$4,40\ m$	$4,41\ m$

  - Einzelergebnisse der Messung sind unterschiedlich

Histogramm

Die Messung lässt sich in einem Histogramm darstellen:



Mittelwert einer Stichprobe

Den Mittelwert $\bar{x}$ der Einzelmessungen x_i erhält man durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Der Mittelwert der Stichprobe wird auch als empirischer Mittelwert oder bester Schätzwert für den wahren Wert μ bezeichnet

Anmerkung: μ ist der *Mittel-* oder *Erwartungswert* der Grundgesamtheit (häufig auch „wahrer“ Wert x_w der Messgröße X genannt: $E(X) = \mu = x_w$). Es wird angenommen, dass die Messgröße X eine (normalverteilte) Zufallsvariable ist. Die unendliche Grundgesamtheit ist die Menge aller möglichen Messwerte.

Absolute und relative Messabweichung

Die Unsicherheit wird in zwei Formen angegeben:

- Absolute Messabweichung („Absoluter Fehler“):
  Der absolute Fehler Δx_i einer **Einzel**messung x_i ist gleich dem Betrag der Abweichung vom Mittelwert $\bar{x}$ aller N Messungen $\{x_n | n \in \{1 \ldots N\}\}$.
  - Angabe in der Einheit der Messgröße
  - $\Delta x_i = |x_i - x_w|$

- Relative Messabweichung („Relativer Fehler“):
  Der relative Fehler Δx_{rel} ist das Verhältnis von absolutem Fehler zum Messwert.
  - dimensionslos, Angabe häufig in %
  - $\Delta x_{i\,\mathrm{rel}} = \frac{\Delta x_i}{x_i}$

Varianz einer Messreihe

Die *Streuung* der einzelnen Messwerte x_i um den empirischen Mittelwert $\bar{x}$ lässt sich durch die Varianz der Messreihe charakterisieren:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i)^2
\end{aligned}
$$

Anmerkung: In der Berechung wurde der Faktor $N-1$ und nicht N wie in der empirischen Varianz, bei der alle Elemente der Grundgesamtheit einfließen, benutzt, da Schätzung der Varianz der Stichprobe sonst kleiner als die der Grundgesamtheit wäre (Information für Schätzung des Mittelwertes auch aus der Stichprobe, was zu einer Reduktion der Freiheitsgrade führt; deshalb Korrekturfaktor $\frac{N}{N-1}$).

Standardabweichung einer Messreihe

Die positive Wurzel der Varianz ist die Standardabweichung bzw. Standardabweichung der Messreihe:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Die Standardabweichung wird auch als mittlerer absoluter Fehler (häufig auch Δx) der Einzelmessungen bezeichnet

Standardabweichung des Mittelwertes

Normalverteilung, $N(\mu, \sigma^2)$

- Eine diskrete Häufigkeitsverteilung einer Messreihe geht für $N \to \infty$ in eine kontinuierliche Verteilung über
- Die Messwerte einer physikalisch-technischen Messgröße X sind in den *meisten* Fällen *annähernd normalverteilt*
- $N \to \infty$: $\bar{x} \to \mu$ und $s \to \sigma$

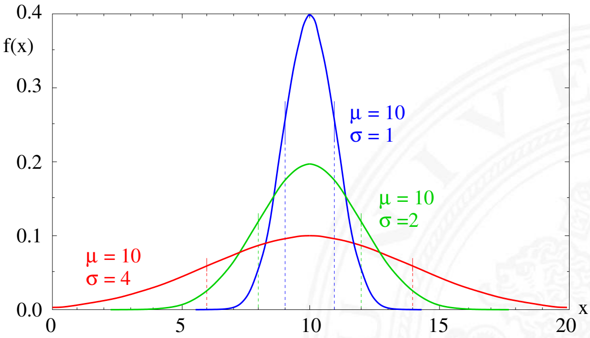
Definition

Normierte Dichtefunktion (Gaußsche Normalverteilung)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Standardabweichung des Mittelwertes (cont.)

Normalverteilung, $N(\mu, \sigma^2)$



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Standardabweichung des Mittelwertes

Satz

Sei $\bar{x}$ arithmetisches Mittel einer Stichprobe, dann gelten bei hinreichend großem n $(n \geq 30)$ die arithmetischen Mittel als annähernd normalverteilt und es gilt:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x$$

mit
$\mu_{\bar{x}}$ = Erwartungswert der Mittelwerte
μ_x = Erwartungswert der Grundgesamtheit

Für die Varianz $(\sigma^2 = E(x - \mu)^2)$ der Mittelwerte gilt:

$$\sigma_{\bar{x}}{}^2 = \frac{\sigma_x{}^2}{n}$$

mit
$\sigma_{\bar{x}}{}^2$ = Varianz der Mittelwerte
$\sigma_x{}^2$ = Varianz der Grundgesamtheit
n = Umfang der Stichprobe

Ergebnis einer Messung

Als Standardabweichung des Mittelwertes (auch: Fehler des Mittelwertes) erhält man somit:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

$s_{\bar{x}}$ beschreibt die Streuung der aus verschiedenen Messreihen erhaltenen Mittelwerte $\bar{x}$ um den „wahren" Wert (Mittelwert) μ

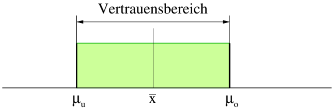
Definition

Als Ergebnis einer Messung erhält man:

$$x = (\bar{x} \pm s_{\bar{x}})\,[Einheit]$$

Vertrauensgrenze

- Intervall um den berechneten Mittelwert, in dem mit gegebener Wahrscheinlichkeit der wahre Mittelwert liegt
- die Vertrauensgrenze von $\pm s_{\bar{x}}$: mit einer W'keit von ca. 0.68 liegt der wahre Mittelwert im angegebenen Intervall
- wird eine Sicherheit von 95 % verlangt, ist das Intervall auf $\pm 2 \cdot s_{\bar{x}}$ zu vergrößern
- bei 99 % auf etwa $\pm 3 \cdot s_{\bar{x}}$



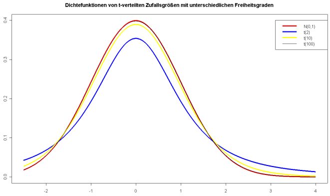
$$\mu_u = \bar{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \mu_0 = \bar{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

t – Faktor gemäß Student-Verteilung

Vertrauensniveau (1-α)	68,3%	95%	99,73%
n=2	1,84	12,7	235,8
n=3	1,32	4,3	19,21
n=4	1,20	3,18	9,22
n=5	1,15	2,78	6,62
n=6	1,11	2,57	5,51
n=10	1,06	2,26	4,09
n=20	1,03	2,09	3,45
n=50	1,01	2,01	3,16
n→∞	1,00	1,96	3,00

t-Verteilung

- Mittelwerte normalverteilter Messreihen von Grundgesamtheiten, deren Varianz unbekannt ist, sind nicht mehr normalverteilt, sondern t-verteilt.
- kontinuierliche Verteilung mit Mittelwert 0 und Fläche 1
- mit steigender Zahl von Freiheitsgraden ($k = n - 1$) Annäherung an Normalverteilung
- Tabellen liefern Werte für Parameterpaare (Freiheitsgrad, W-keit)



Quelle:wikipedia.org

Fehlerfortpflanzung

- wird eine abgeleitete Größe aus mehreren Messgrößen berechnet, so ist ebenfalls eine Messunsicherheit anzugeben
- ist die zu berechnende Größe

$$z = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

und $\Delta\bar{x}_i$ die Messunsicherheit (Maximalfehler) der einzelnen Messgrößen, so ist die Messunsicherheit $\Delta\bar{z}$ der zu berechnenden Größe

$$\Delta\bar{z} = \left|\frac{\delta f}{\delta x_1}\right| \cdot \Delta\bar{x}_1 \; + \; \ldots \; + \; \left|\frac{\delta f}{\delta x_n}\right| \cdot \Delta\bar{x}_n$$

Fehlerfortpflanzung (cont.)

- Die partiellen Ableitungen stellen Gewichtsfaktoren für die Fortpflanzung der einzelnen Fehler dar.
- Gewichtsfaktoren sollten grundsätzlich vor der Messung berechnet werden.
- Nur so kann erkannt werden, welche Fehler sich besonders stark auf das Endergebnis auswirken.
- Entsprechende Messwerte müssen besonders genau ermittelt werden.
- Das Messergebnis einer indirekt ermittelten Messgröße lautet dann:

$$z = \bar{z} \pm \Delta\bar{z}$$

Fehlerfortpflanzung (cont.)

- **zwei Faustregeln:**
  - bei *Addition* und *Subtraktion* addieren sich die *absoluten Fehler*
  - bei *Multiplikation* und *Division* addieren sich die *relativen Fehler*
- Quadrierung verdoppelt, Quadratwurzel ziehen halbiert den *relativen Fehler*
- die Differenz zweier nahezu gleich großer Größen erhält einen großen *relativen Fehler* $\Rightarrow$ besser: Differenz direkt messen

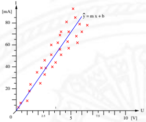
Approximation vs. Interpolation

grundsätzlich: Annäherung einer Datenreihe (z. B. aus einer physikalischen Messung) durch eine (möglichst) einfache Funktion $p(x)$.

- Approximation:
  die Funktion $p(x)$ soll die Datenpaare (x_k, y_k) besonders gut (z. B. minimaler quadratischer Fehler) repräsentieren;
  es muss **nicht** gelten: $p(x_k) = y_k$
- Interpolation:
  die Funktion $p(x)$ ist derart zu konstruieren, dass sie für die vorliegenden Datenpaare exakt ist;
  es **gilt** also $p(x_k) = y_k; \quad k = 1, 2, \ldots, n$

Lineare Regression

- **häufige Aufgabe:** Messen eines Zusammenhangs zwischen zwei Größen x und y
- **Beispiel:** Spannung und Strom an einem Widerstand
- **linearer Zusammenhang** von x und y



$$\hat{y} = m \cdot x + b \qquad (11)$$

- Um den statistischen Fehler zu reduzieren, wird eine Messreihe mit n Messwertpaaren aufgenommen.
- Koeffizienten von (11) werden durch lineare Regression bestimmt.

Lineare Regression (cont.)

Regressionsgerade:
$\hat{y}_i = m x_i + b$

Randbedingungen:

i $f(m,b) = \sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{y}_i = 0$

ii $g(m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow min$

x_i, y_i – Messwerte
$\hat{x}_i, \hat{y}_i$ – approx. Werte
$\bar{x}, \bar{y}$ – arith. Mittelwerte

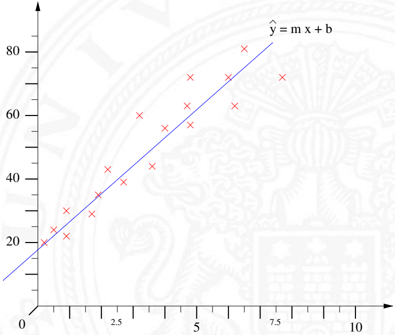
i $\sum_{i=1}^{n} (y_i - m x_i - b) = 0$

$\sum_{i=1}^{n} y_i - m \sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0$

$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$b = \bar{y} - m\bar{x}$

ii $g(m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - m x_i - b)^2 \rightarrow min$



Lineare Regression (cont.)

ii $g(m) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - \bar{y} + m\bar{x})^2 \rightarrow min$

$g(m) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y} - m(x_i - \bar{x}))^2 \rightarrow min$

$g'(m) = \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y} - m(x_i - \bar{x})) = 0$

$0 = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - 2m\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

- Die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden berechnen sich nach:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$b = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$$

Lineare Regression (Variante 2)

Regressionsgerade:
$\hat{y}_i = mx_i + b$

Minimieren der Abstandsquadrate:

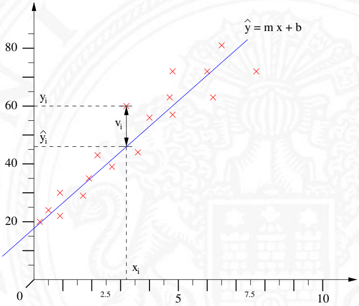
$$\begin{aligned} S(m,b) &= \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \rightarrow min \\ &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow min \\ &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2 \rightarrow min \end{aligned}$$

Bilden der partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{b}} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b) \quad = 0 \quad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{m}} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - mx_i - b) = 0 \quad \text{(ii)}$$

x_i, y_i – Messwerte
$\hat{x}_i, \hat{y}_i$ – approx. Werte
$\bar{x}, \bar{y}$ – arith. Mittelwerte



Lineare Regression (Variante 2) (cont.)

Auflösen des Gleichungssystems:

i $0 = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)$

ii $0 = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - mx_i - b)$

i:
$$0 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)$$
$$0 = \sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i - nb$$
$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - m\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ii:
$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - mx_i - b)$$
$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - mx_i - \bar{y} + m \cdot \bar{x})$$
$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - mx_i x_i - x_i\bar{y} + mx_i\bar{x})$$
$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_i\bar{y} - m(x_i x_i - x_i\bar{x}))$$
$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y}) - m\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})$$

$$b = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})}$$

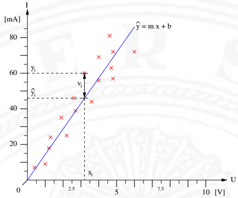
Lineare Regression

Beispiel: Widerstandskennlinie (Ursprungsgerade)

Regressionsgerade:

$$\hat{y}_i = mx_i$$

x_i, y_i – Messwerte
$\hat{x}_i, \hat{y}_i$ – approx. Werte
$\bar{x}, \bar{y}$ – arith. Mittelwerte



Minimieren der Abstandsquadrate:

$$\begin{aligned} S(m) &= \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \to min \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \to min \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i)^2 \to min \end{aligned}$$

Bilden der Ableitung:

$$\frac{\partial S}{\partial m} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - mx_i) = 0$$

Auflösen der Gleichung:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - mx_i)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - mx_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - m \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \end{aligned}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

Korrelationskoeffizient

- Häufig wird der empirische Korrelationskoeffizient r_{xy} angegeben:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

- je näher r_{xy} an ± 1 liegt, um so stärker ist eine lineare Abhängigkeit gegeben
- falls $r_{xy} = 0$, ist kein linearer Zusammenhang gegeben, wohl aber ist ein nichtlinearer möglich

Regressionsparabel

Liegen die Messpunkte *nahezu* auf einer Parabel, wählt man einen quadratischen Lösungsansatz.

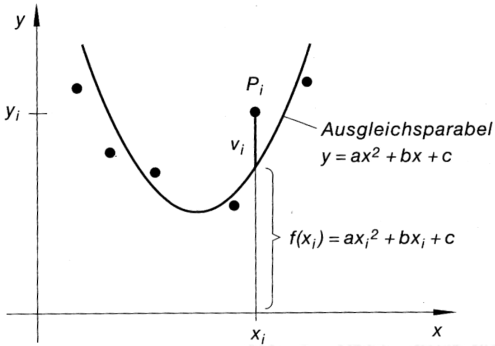
Regressions- oder Ausgleichsparabel

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Regressionsparabel (cont.)

Der vertikale Abstand v_i des i-ten Messpunktes von dieser Parabel beträgt:

$$v_i = y_i - f(x_i) = y_i - ax_i^2 - bx_i - c$$



Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate

- Minimieren der Abstandsquadrate aller Messpunkte

$$S(a;b;c) = \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

$$S(a;b;c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

- Eliminieren der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)(-x_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)(-1) = 0$$

Regressionsparabel

- Durch Auflösen der Summen und Ordnen erhält man folgende drei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right) \cdot a + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) \cdot b + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) \cdot c &= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) \cdot a + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) \cdot b + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \cdot c &= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) \cdot a + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \cdot b + n \cdot c &= \sum_{i=0}^{n} y_i
\end{aligned}
$$

Regressionsparabel (cont.)

- Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich mit Hilfe der Cramerschen Regel oder durch den Gaußschen Algorithmus lösen.
- Für eine Regressionsparabel müssen mindestens vier Messpunkte vorliegen ($n \geq 4$).

- Beispiel zur Anwendung der Regressionsparabel:
  - Ermittlung des Zusammenhangs zwischen *Bremsweg* s (in m) und *Geschwindigkeit* v (in km/h)
  - siehe: L. Papula: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler (Band 3)*, Seite 712–714

Nichtlineare Regression

- Viele nichtlineare Lösungsansätze lassen sich durch eine Transformation auf den linearen Ansatz zurückführen.
- Beispiel: Exponentialfunktion

$$y = a \cdot e^{bx}$$

- durch *Logarithmieren* erhält man:

$$\ln y = \ln(a \cdot e^{bx}) = \ln a + \ln(e^{bx}) = \ln a + bx$$

Nichtlineare Regression (cont.)

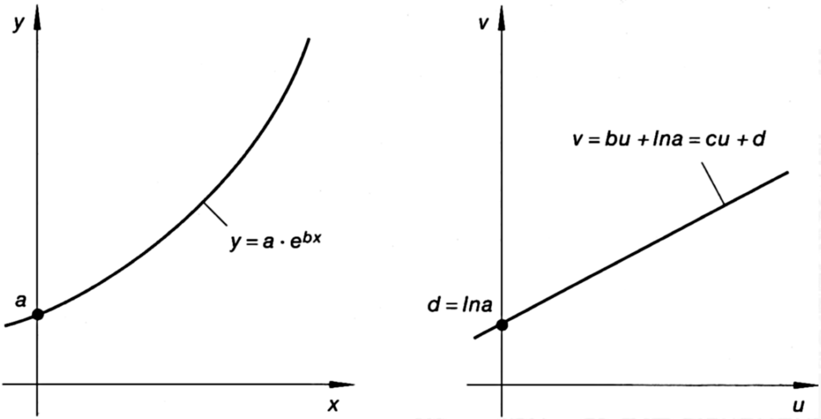
- Einführen einer *Transformation*

$$u = x, \quad v = \ln y \qquad \text{Zusätzlich:} \quad c = b, \quad d = \ln a$$

Transformation: *Exponentialfunktion in lineare Funktion*

$$y = a \cdot e^{bx} \xrightarrow{ln} \ln y = bx + \ln a \xrightarrow[v=\ln y]{u=x} v = cu + d$$

Nichtlineare Regression (cont.)



Transformationen: $u = x, \quad v = \ln y \qquad$ und $\quad c = b, \quad d = \ln a$

Nichtlineare Regression (cont.)

- Überführung der Messwerte $(x_i; y_i)$ in neue Wertepaare $(u_i; v_i) = (x_i; \ln y_i)$ mittels Transformation
- Ausführen der Regression auf den neuen Werten
- Berechnung der „Hilfsparameter“ c und d

Durch Rücktransformation erhält man a und b

$$\ln a = d \Rightarrow a = e^d \qquad \text{und} \qquad b = c$$

Nichtlineare Regression (cont.)

Ansatz	**Transformation** $u =$	$v =$	**transformierter Ansatz** (linear)	**Rücktransformation**
$y = a \cdot x^b$	$\ln x$	$\ln y$	$v = cu + d$	$a = e^d, \quad b = c$
$y = a \cdot e^{bx}$	x	$\ln y$	$v = cu + d$	$a = e^d, \quad b = c$
$y = \frac{a}{x} + b$	$1/x$	y	$v = cu + d$	$a = c, \quad b = d$
$y = \frac{a}{b+x}$	x	$1/y$	$v = cu + d$	$a = \frac{1}{c}, \quad b = \frac{d}{c}$
$y = \frac{ax}{b+x}$	$1/x$	$1/y$	$v = cu + d$	$a = \frac{1}{d}, \quad b = \frac{c}{d}$

Nichtlineare Regression (cont.)

- nach Linearisierung stets lineare Regression auf transformierten Messwerten
- rechentechnisch einfach und daher beliebt; führt aber aufgrund der unsicheren Eingangswerte über die linearisiert wird, nicht zu den tatsächlichen Parametern a, b, ...
- exakteBestimmung nur über Minimierung der eigentlichen Zielfunktion

$$S(a; b; \dots) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

- exakte Parameter meist nur durch erheblichem numerischen Rechenaufwand bestimmbar

Agenda

3. Grundlagen der Sensorik

- Einführung
- Messen mit Sensoren
- Eigenschaften von Sensoren
- Literatur

Eigenschaften von Sensoren

- Eingangssignal wird eventuell mehrmals konvertiert, bis elektrisches Ausgangssignal generiert werden kann

Beispiel: Druck auf Glasfaser-Sensor

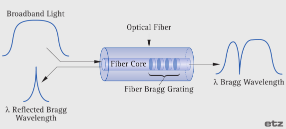
$\Rightarrow$ Dehnung

$\Rightarrow$ Änderung des Brechungsindex

$\Rightarrow$ Änderung der optischen Übertragung

$\Rightarrow$ Messung des Photonenflusses

$\Rightarrow$ Umwandlung in Strom



- in diesem Kapitel wird ein Sensor zunächst als **„Black Box“** betrachtet

Übertragungsfunktion

- Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal
  $\Rightarrow$ Zusammenhang zwischen Stimulus und Ausgangsgröße
- jeder Sensor besitzt eine ideale bzw. theoretische Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal

Definition

Die ideale Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal eines Sensors wird durch die Übertragungsfunktion $S = f(s)$ beschrieben (engl.: *transfer function*).

Ideale Übertragungsfunktion ($S = f(s)$)

- das Ausgangssignal S repräsentiert den wahren Wert des Eingangssignals s
- gilt bei idealem Design, Material, idealer Fabrikation ...
- jedoch: Beziehung zwischen Stimulus und Ausgangssignal wird beeinflusst durch
  - Fertigungsungenauigkeiten
  - Materialfehler
  - Umgebungseinflüsse
  - Abnutzung ...
- die wirkliche Beziehung wird als reale Übertragungsfunktion bezeichnet

Übertragungsfunktion

- meistens ist die Beziehung zwischen Stimulus und Ausgangssignal
  - **eindimensional** und
  - **linear**

lineare Übertragungsfunktion

$$S = a + b \cdot s$$

- a ist das Ausgangssignal bei einem Eingangssignal $s = 0$
- b ist die Steigung
  - b wird oft auch als Sensitivität bezeichnet

Übertragungsfunktion (cont.)

Weitere wichtige Übertragungsfunktionen

- logarithmische Übertragungsfunktion:

$$S = a + k \cdot \ln s \qquad mit \;\; k = const$$

- exponentielle Übertragungsfunktion:

$$S = a \cdot e^{ks}$$

- beliebige Polynome höherer Ordnung

Sensitivität

lineare Übertragungsfunktion

$$S = a + b \cdot s$$

mit b als Maß der Sensitivität

nichtlineare Übertragungsfunktion

Für nicht-lineare Übertragungsfunktionen ist die Sensitivität für jeden Eingangswert s_i wie folgt definiert:

$$b = \frac{dS(s_i)}{ds}$$

Approximation einer Übertragungsfunktion

- Einige nichtlineare Übertragungsfunktionen sind linear in einem eingeschränkten Bereich.
- Nichtlineare Übertragungsfunktionen können durch mehrere lineare Funktionen approximiert werden.

- Die Differenz zwischen wahrem und linear approximiertem Ausgangssignal sollte unter einem zu spezifizierenden Limit liegen.

Mehrdimensionale Übertragungsfunktionen

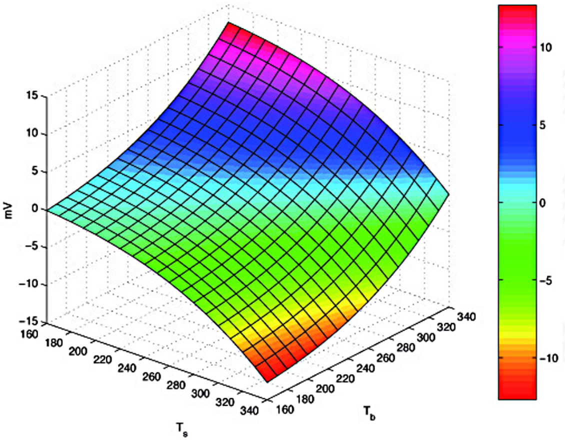
- Übertragungsfunktion kann von mehr als einem Stimulus abhängen
- **Beispiel:** Infrarot-Wärmestrahlungssensor

$$U = G(T_b^4 - T_s^4) \qquad (Stefan - Boltzmann - Gesetz)$$

  - G – Konstante
  - T_b – absolute Temperatur des gemessenen Objektes
  - T_s – absolute Temperatur der Sensoroberfläche
  - U – Ausgangsspannung
  - Sensitivität in Bezug auf die Temperatur des gemessenen Objektes:

$$b = \frac{\partial U}{\partial T_b} = 4GT_b^3$$

Mehrdimensionale Übertragungsfunktionen (cont.)



Messbereich

Definition

Der dynamische Bereich eines Stimulus, der von einem Sensor erfasst wird, wird Messbereich (engl. *Span* oder *Full Scale Input*) genannt.

- beziffert den kleinsten und höchsten für einen Sensor zulässigen Stimuluswert
- größere Stimuli können den Sensor beschädigen

Messbereich (cont.)

- Angabe des Messbereichs als Verhältnis von maximalem zu minimalem Eingangswert möglich
- bei großen dynamischen und nicht-linearen Eingangssignalen wird er in *Dezibel* angegeben
  - Dezibel ist ein logarithmisches Maß für das Verhältnis G zweier Leistungen (P):

$$G[dB] = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$

  - für Größen, die quadratisch in die Berechnung der Leistung eingehen (Strom (I), Spannung (U)) gilt (Beispiel U):

$$G[dB] = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{U_2 U_2 / R}{U_1 U_1 / R} = 10 \log \frac{{U_2}^2}{{U_1}^2} = 20 \log \frac{U_2}{U_1}$$

  - **Beispiel:** Verstärkung eines Messverstärkers
    in: $1\,mV$; out: $5\,V$ $\quad\rightarrow\quad$ $G = 20 \cdot \log\left[\frac{5}{0.001}\right] = 74\,dB$

Ausgabebereich

Definition

Der Ausgabebereich (engl. *Full Scale Output*) eines Sensors ist das Intervall zwischen dem Ausgangssignal bei kleinstem und größtem angelegten Stimulus.

Genauigkeit

- wichtige Eigenschaft eines Sensors: Genauigkeit
- *eigentlich:* Ungenauigkeit
- Genauigkeit beschreibt die maximale Abweichung zwischen den idealen und den vom Sensor ausgegebenen Werten
- wie bei Messungen spricht man von *systematischen* und *zufälligen* Fehlern eines Sensors

⇒ siehe Abschnitte zu „Messfehler“ und „Fehlerrechnung“

Reale Übertragungsfunktion

- Im Vergleich zur idealen Übertragungsfunktion sind reale Sensoren immer ungenau.
- Die Übertragungsfunktion eines realen Sensors heißt daher: reale Übertragungsfunktion.

- **Problem:** Sie ist im Gegensatz zu idealen Übertragungsfunktionen meistens weder linear noch monoton.
- **Gründe:** Unterschiede im Material und in der Herstellung, Fehler im Design, Toleranzen in der Herstellung, ...
- **Trotzdem:** Jeder Sensor sollte innerhalb einer angegebenen Genauigkeit arbeiten.

Reale Übertragungsfunktion (cont.)

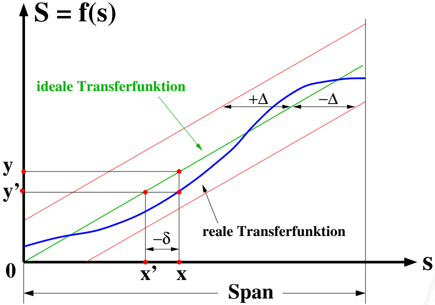
- erlaubte Abweichung von der idealen Übertragungsfunktion: $\pm\Delta$
- Abweichung zwischen idealer und realer Übertragungsfunktion: $\pm\delta$

$$\delta \leq \Delta$$

Beispiel: Stimulus x

- ideale Übertragungsfunktion: $y = f_{ideal}(x)$
- reale Übertragungsfunktion: $y' = f_{real}(x)$

Reale Übertragungsfunktion (cont.)



ideale Fkt: $y = f_{ideal}(x)$

reale Fkt: $y' = f_{real}(x)$

Achtung:

Nimmt man die ideale Übertragungsfunktion, um vom Ergebnis y' auf den Stimulus abzubilden erhält man x' und $\delta = x - x'$

Kalibrierungsfehler

- Firmen *kalibrieren* neue Sensoren nach der Herstellung
- es ergibt sich ein systematischer Fehler:

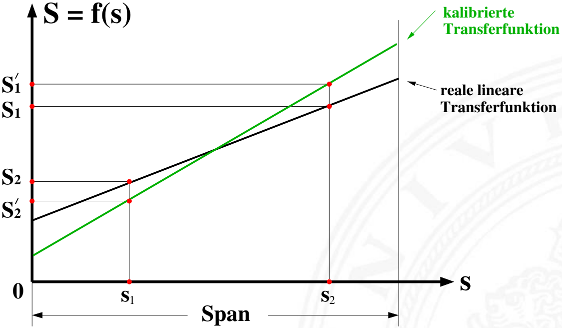
  Kalibrierungsfehler
  - Die Ausgabe des Sensors wird für jeden Stimulus um eine Konstante (additiv oder multiplikativ) verschoben.
  - Dieser Fehler ist nicht unbedingt gleichmäßig über den Eingabebereich verteilt.

Beispiel: Einfache Kalibrierung

- ein Sensor hat eine lineare Übertragungsfunktion
- für jeden hergestellten Sensor kann die Steigung aus Materialgründen unterschiedlich sein

- der Hersteller bestimmt daher die Steigung für jeden Sensor:
  - es werden zwei Stimuli s_1 und s_2 angelegt
  - der Sensor antwortet mit den zugehörigen Signalen S_1 und S_2
  - die Steigung für diesen Sensor kann bestimmt werden
  - **Problem:** die Steigung wird aufgrund von Messfehlern nicht mit der realen übereinstimmen

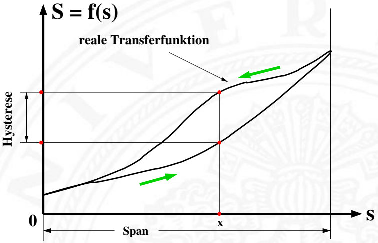
Beispiel: Einfache Kalibrierung (cont.)



Hysteresefehler

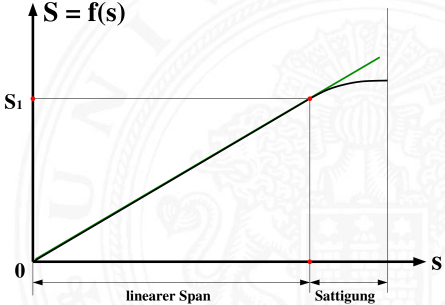
Definition

Ein Hysteresefehler ist die Abweichung des Ausgangssignals eines Sensors für einen bestimmten Stimuluswert, je nachdem, aus welcher Richtung der Stimulus sich diesem Wert nähert.



Sättigung

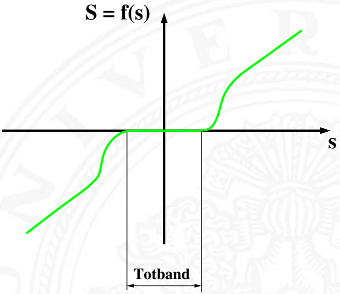
- fast jeder Sensor hat Arbeitsbereichsgrenzen
- viele Sensoren haben eine lineare Übertragungsfunktion, ...
- **aber:** ab einem bestimmten Stimuluswert wird nicht mehr die erwartete Ausgabe erzeugt
- man spricht dann von Sättigung



Totband

Definition

Ein Sensor hat ein Totband, wenn er in einem zusammenhängenden Bereich des Eingangssignals mit dem gleichen Ausgangssignal (oft 0) reagiert

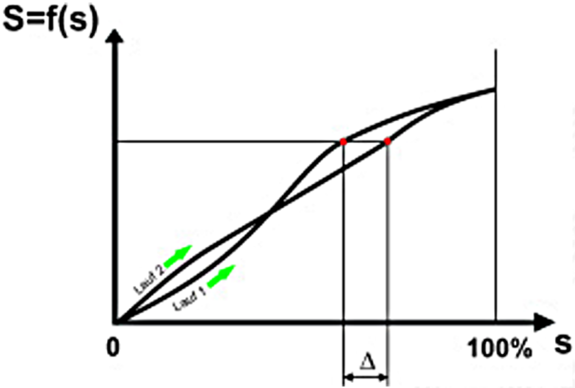


Wiederholgenauigkeit

- ein Sensor kann bei gleichen Bedingungen unterschiedliche Ausgabewerte produzieren
  $\longrightarrow$ Wiederholgenauigkeit
- für zwei Kalibrierungszyklen normalerweise:
  Maximale Distanz Δ *zweier Stimuli mit gleichem Ausgangssignal*
- Wiederholgenauigkeit δ_r wird anteilig zum Messbereich angegeben:

$$\delta_r = \frac{\Delta}{Span} \cdot 100\%$$

Wiederholgenauigkeit (cont.)



Auflösung

Definition

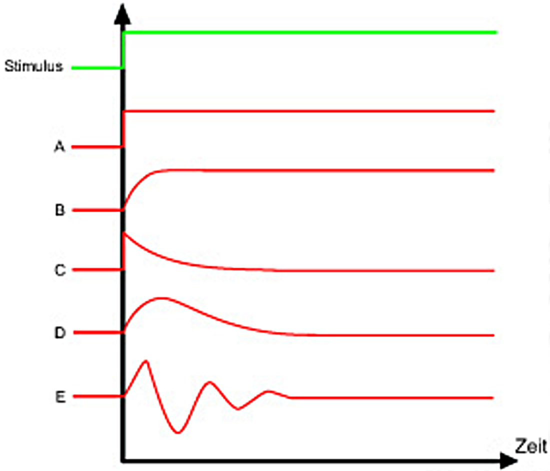
Die Auflösung beschreibt den kleinsten Änderungsschritt des Stimulus, der vom Sensor erfasst wird.

- Beispiele: Potentiometer, Winkel bei Lasermesssystemen, ...
- die Auflösung kann sich über den gesamten Eingangsbereich ändern
- die Auflösung digitaler Ausgabeformate ist durch die Anzahl der Bits im Ausgabewort definiert
  (Audio: 8bit/16bit/20bit/24bit)
- sind die Schritte nicht messbar, hat der Sensor eine *kontinuierliche* bzw. *infinitesimale* Auflösung

Dynamische Eigenschaften

- bei statischen Eingangssignalen beschreiben die bisher genannten Eigenschaften einen Sensor vollständig
- wenn das Eingangssignal variiert, gilt dies nicht mehr
- **Grund:** der Sensor reagiert nicht immer direkt/unmittelbar auf den Stimulus
- Sensoren geben häufig zeitverzögert zum Stimulus den zugehörigen Ausgabewert aus
  - dies nennt man die dynamischen Eigenschaften eines Sensors
  - der entstehende Fehler heißt dynamischer Fehler

Antwortverhalten

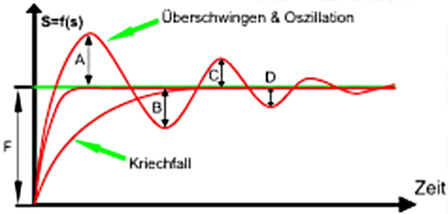


Dämpfung & Dämpfungsfaktor

Für den oszillierenden Fall kann ein Dämpfungsfaktor bestimmt werden:

Definition

$$Dämpfungsfaktor = \frac{F}{A} = \frac{A}{B} = \frac{B}{C} = usw.$$



Umwelteinflüsse

- minimal und maximal zulässige Umgebungstemperatur
- minimal und maximal zulässige Luftfeuchtigkeit
- Kurz- und Langzeitstabilität (Drift)
  Hilfe bei Langzeitdrift: Pre-Aging erhöht Stabilität
- statische und dynamische Änderungen von elektromagnetischen Feldern, Gravitationskräften, Vibrationen, Strahlung etc.
- Selbsterhitzung z.B. durch Stromfluss

Weitere Sensoreigenschaften

- Verlässlichkeit
  z.B. durch Angabe der *mean-time-between-failure* (MTBF)
- besondere Eigenschaften für das Einsatzgebiet:
  - Design
  - Gewicht
  - Maße
  - Preis
  - ...

Literaturliste

[Fra04] Kap. 2 In: Jacob Fraden:
Handbook of modern sensors: physics, design, and applications.
3.
Springer-Verlag New York, Inc., 2004, S. 1–32

[Pap01] Kap. IV In: Lothar Papula:
Mathematik für Ingeneure und Naturwissenschaftler (Band 3): Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung.
4.
Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Mai 2001

Literaturliste (cont.)

[SK94] Kap. 1 In: Herbert A. Stuart, Gerhard Klages:
Kurzes Lehrbuch der Physik.
14.
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1994

[SN04] Kap. 4.1 In: Roland Siegwart, Illah R. Nourbakhsh:
Introduction to Autonomous Mobile Robots.
MIT Press Cambridge, Massachusetts, 2004, S. 89–98