



# 64-544

## Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

<http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2014ss/vorlesung/GdSR>

Jianwei Zhang, Bernd Schütz



Universität Hamburg  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Fachbereich Informatik  
**Technische Aspekte Multimodaler Systeme**

Sommersemester 2014



# Gliederung

1. Einführung
2. Grundlagen der Robotik
3. Grundlagen der Sensorik
4. Verarbeitung von Scandaten
5. Rekursive Zustandsschätzung
6. Fuzzy-Logik
7. Steuerungsarchitekturen





# Agenda

## 2. Grundlagen der Robotik

Grundbegriffe

Roboterklassifikation

**Koordinatensysteme**

Verknüpfung der Drehmatrizen

Homogene Transformationen

Koordinaten-Frames

Zusammenfassung der homogenen Transformationen

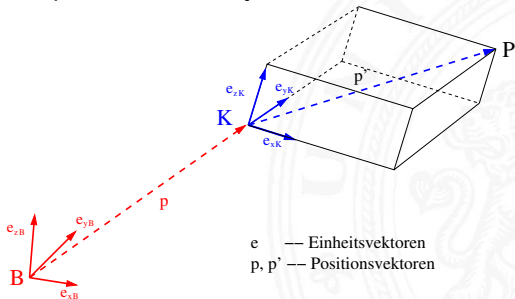
Roboterkinematik

Literatur



# Koordinatensysteme

Die Lage von Gegenständen, also ihre **Position** und **Orientierung** im euklidischen Raum, lässt sich beschreiben durch Angabe eines kartesischen Koordinatensystems (KS) hier K und der Angabe der Transformation zwischen dem Ausgangs-Koordinatensystem (hier B) und dem Körperkoordinatensystem K.

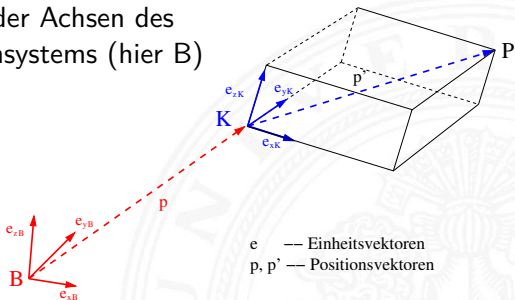




# Beschreibung der Position und Orientierung von Objekten

Position (Objekt-Koordinaten):

- ▶ Translation entlang der Achsen des Ausgangskoordinatensystems (hier B)

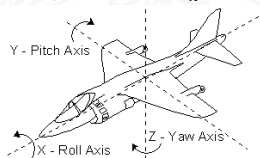
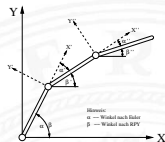


- ▶ gegeben durch  $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T \in \mathcal{R}^3$

## Beschreibung von Position und Orientierung (cont.)

### Orientierung (Lage im Raum):

- ▶ Euler-Winkel  $\phi, \theta, \psi$ 
  - ▶ Drehungen werden nacheinander um die Achsen der neuen Koordinatensysteme durchgeführt; z. B.  $ZX'Z''$  o.  $ZY'X''$
- ▶ Kardan-Winkel (Roll-Pitch-Yaw)
  - ▶ auf Objektkoordinatensystem bezogen (in Luft- u. Seefahrt üblich)
  - ▶ Rotationen erfolgen auf die unveränderten Achsen (X-Roll, Y-Pitch, Z-Yaw)
- ▶ gegeben durch Dreh- oder Rotationsmatrix  $R \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ 
  - ▶ redundant; 9 Parameter bei  $f=3$



$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

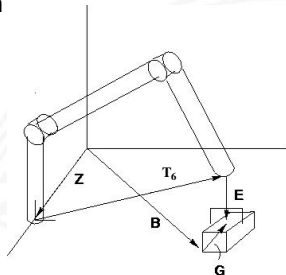
# Koordinaten-Transformation

## ► Überführung von Koordinatensystemen:

Frame: ein Bezugskordinatensystem

*Typische Frames:*

- Roboterbasis
- Endeffektor
- Tisch (Welt)
- Objekt
- Kamera
- Bildschirm
- ...



Frame-Transformationen überführen einen Frame in einen anderen.

## Koordinaten-Transformation (cont.)

Punkte im Raum können beschrieben werden durch:

- ▶ Positionsvektoren
- ▶ Rotationsmatrix

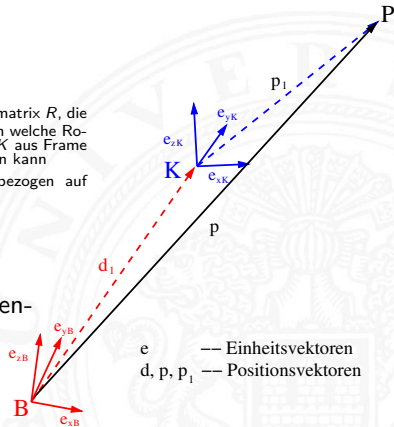
$$\begin{aligned} {}^B p &= {}^B d_1 + {}^B p_1 \\ &= {}^B d_1 + {}^B R_K {}^K p_1 \end{aligned}$$

Hinweis:

${}^B R_K$ : Rotationsmatrix  $R$ , die beschreibt, durch welche Rotationen Frame  $K$  aus Frame  $B$  erzeugt werden kann

${}^K p$ : Vektor  $p$  bezogen auf Frame  $K$ .

- ▶ Notation:  
oben links: Bezugskoordinatensystem  
unten rechts: betrachtetes Koordinatensystem







## Ausrichtung der Koordinatensysteme

- ▶ Überführung der Ausrichtung der KS durch drei fundamentale Rotationen
- ▶ fundamentale Rotationen können z. B. aus Rotation um X-, Y-, Z-Achse gewählt werden
- ▶ Rotationsfolge muss Menge der Rotationen in  $R^3$  aufspannen
- ▶ 12 der möglichen Kombinationen spannen Raum auf, z.B.  $ZX'Z''$ ,  $ZY'Z''$  oder  $ZY'X''$
- ▶ Abbildung der Rotationen auf Euler-Winkel nicht bijektiv (Singularitäten z. B. bei Rotation um  $Y'$  mit  $\theta = 0^\circ$  oder  $180^\circ$  bei  $ZY'Z''$ -Notation oder mit Rotationen von  $\pm 90^\circ$  um die 2. Achse bei Kardan-Winkeln)

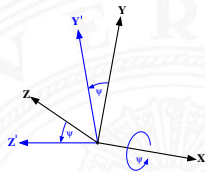


# Koordinaten-Transformation (cont.)

## Rotation um x-Achse

Drehung um die x-Achse um den Winkel  $\psi$ :

$$R_{x(\psi)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}$$



Beispiel:

$$\begin{aligned} \vec{a}'^T &= R_{x(\psi)} \cdot \vec{a}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \cdot \cos(\psi) - a_z \cdot \sin(\psi) \\ a_y \cdot \sin(\psi) + a_z \cdot \cos(\psi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



## Exkurs: Rotation in der euklidischen Ebene $\mathcal{R}^2$

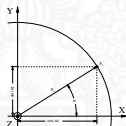
- Drehung eines Vektors  $\vec{p}_1$  in  $\mathcal{R}^2$  auf dem Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn um einen festen Ursprung um den Winkel  $\theta$ .

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = \cos(\alpha) \\ y_1 = \sin(\alpha) \end{matrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = R(\vec{p}_1, \theta)$$

$$x_2 = \cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta$$

$$y_2 = \sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cdot \cos \theta + \cos \alpha \cdot \sin \theta = y_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$



- also:

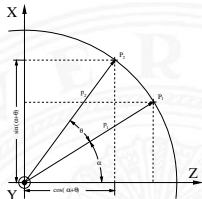
$$\vec{p}_2 = R_{(\theta)} \vec{p}_1 \quad \text{mit} \quad R_{(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



## Rotation um $y$ -Achse

Drehung um die  $y$ -Achse um den Winkel  $\theta$ :

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



$$z_2 = \cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta = z_1 \cos \theta - x_1 \sin \theta$$

$$x_2 = \sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cdot \cos \theta + \cos \alpha \cdot \sin \theta = x_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta \\ z_2 &= -x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$



## Rotation um z-Achse

Drehung um die z-Achse um den Winkel  $\phi$ :

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Koordinaten-Transformation (cont.)

## Zusammenfassen der Einzelrotationen

- ▶ aufeinanderfolgende Einzelrotationen lassen sich in einer Rotationsmatrix zusammenfassen (siehe: Folge von Drehungen)

- ▶ Dreh- oder Rotationsmatrix  $R \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ :

- ▶ redundant; 9 Parameter bei  $f=3$

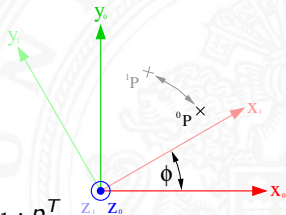
$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$



## Anwendung der Rotationen/Rotationsfolgen

- ▶ Rotationsfolge beschrieben durch Drehmatrix  ${}^m R_n$   
 (Rotationsmatrix  $R$  für  $KS_n$  bezogen auf  $KS_m$ )
- ▶ Beispiel:  
 $KS_1$  gegenüber  $KS_0$  um Winkel  $\phi$  um die Z-Achse rotiert

$${}^0 R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

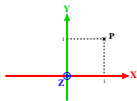


- ▶ Transformation eines Punktes  $P$ :
  - ▶ Multiplikation von links:  $p'^T = {}^0 R_1 \cdot p^T$
  - ▶ Multiplikation von rechts:  $p'' = p \cdot {}^0 R_1$

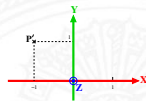
# Interpretation der Linksmultiplikation ( $p'^T = {}^0R_1 \cdot p^T$ )

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \cdot \cos(\phi) - p_y \sin(\phi) \\ p_x \sin(\phi) + p_y \cos(\phi) \\ p_z \end{bmatrix}$$

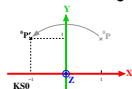
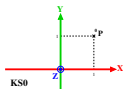
- Dargestellt mit  $\phi = 90^\circ$  und  $p = [1 \ 1 \ *]^T$



$${}^0R_1 \cdot [1 \ 1 \ *]^T = [-1 \ 1 \ *]^T$$



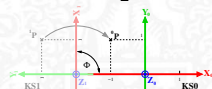
- $p$  in Koordinaten des  $KS_0$



$$({}^0p')^T = {}^0R_1 \cdot ({}^0p)^T$$

Rotation von  $p$  im  $KS_0$

- $p$  in Koordinaten des  $KS_1$



$$({}^0p)^T = {}^0R_1 \cdot ({}^1p)^T$$

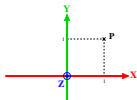
Transformation von  ${}^1p$  nach  ${}^0p$



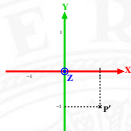
# Interpretation der Rechtsmultiplikation ( $p' = p \cdot {}^0R_1$ )

$$[p_x \quad p_y \quad p_z] \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [p_x \cos(\phi) - p_y \sin(\phi) \quad -p_x \sin(\phi) + p_y \cos(\phi) \quad p_z]$$

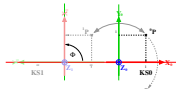
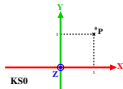
- Dargestellt mit  $\phi = 90^\circ$  und  $p = [1 \quad 1 \quad *]$



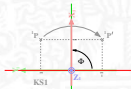
$$[p_x \quad p_y \quad p_z] \cdot {}^0R_1 = [p_y \quad -p_x \quad p_z]$$



- $p$  in Koordinaten des  $KS_0$



- $p$  in Koordinaten des  $KS_1$



Transformation von  ${}^0p$  nach  ${}^1p$

$${}^1p = {}^0p \cdot {}^0R_1$$

Rotation von  $p$  im  $KS_1$  um  $-\phi$

$${}^1p' = {}^1p \cdot {}^0R_1$$



## Zusammenfassung Rechts-/Linksmultiplikation

- ▶  ${}^0R_1 \cdot p$  (Linksmultiplikation)

$$({}^0p)^T = {}^0R_1 \cdot ({}^1p)^T \quad \text{Koordinatentransformation} \quad (1)$$

von  $KS_1 \rightarrow KS_0$

$$({}^0p')^T = {}^0R_1 \cdot ({}^0p)^T \quad \text{Punkt im } KS_0 \text{ um } \phi \text{ rotiert}$$

- ▶  $p \cdot {}^0R_1$  (Rechtsmultiplikation)

$${}^1p = p \cdot {}^0R_1 \quad \text{Koordinatentransformation} \quad (2)$$

von  $KS_0 \rightarrow KS_1$

$${}^1p' = p \cdot {}^0R_1 \quad \text{Punkt im } KS_1 \text{ um } -\phi \text{ rotiert}$$



# Folge von Drehungen, Rechts- und Linksmultiplikation

$${}^B R_K \cdot K_V^T = B_X^T \quad (\text{vgl. Gl.1})$$

$$R \cdot v^T = x^T$$

$$R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot v^T = x^T$$

$$R_2 \cdot R_1 \cdot v^T = R_3^{-1} \cdot x^T$$

$$R_1 \cdot v^T = R_2^{-1} \cdot R_3^{-1} \cdot x^T$$

$$v^T = R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot R_3^{-1} \cdot x^T$$

$$v^T = R_1^T \cdot R_2^T \cdot R_3^T \cdot x^T$$

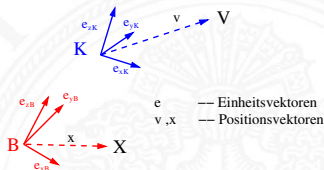
$$v = (R_1^T \cdot R_2^T \cdot R_3^T \cdot x^T)^T$$

$$v = x \cdot R_3 \cdot R_2 \cdot R_1$$

$$K_V = B_X \cdot {}^B R_K \quad (\text{vgl. Gl.2})$$

$$\text{mit : } {}^B R_K = {}^B R_{3K} \cdot {}^B R_{2K} \cdot {}^B R_{1K}$$

$$\text{kurz : } {}^B R_K = R = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1$$



$$\text{mit : } (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

 Notation  ${}^B R_K$ :

 oben links:  
 unten rechts:

 Bezugskoordinatensystem (hier B)  
 betrachtetes Koordinatensystem (hier K)

# Folge von Drehungen, Rechts- und Linksmultiplikation

${}^B R_K$  versus  ${}^K R_B$

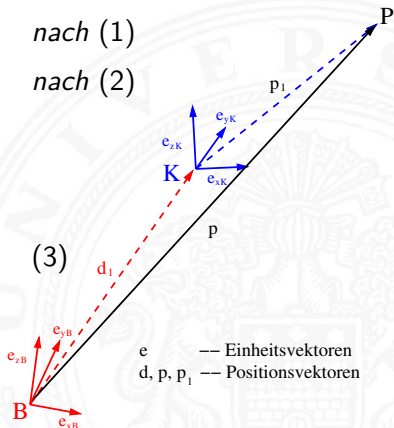
$${}^B p_1^T = {}^B R_K \cdot {}^K p_1^T \quad \text{nach (1)}$$

$${}^B p_1 = {}^K p_1 \cdot {}^K R_B \quad \text{nach (2)}$$

$$({}^B R_K \cdot {}^K p_1^T)^T = {}^K p_1 \cdot {}^K R_B$$

$${}^K p_1 \cdot {}^B R_K^T = {}^K p_1 \cdot {}^K R_B$$

$$\Rightarrow \quad {}^B R_K^{-1} = {}^K R_B \quad (3)$$





## Übersicht Koordinatentransformationen

- ▶  ${}^0R_1 \cdot p$  (Linksmultiplikation)

$$({}^0p)^T = {}^0R_1 \cdot ({}^1p)^T \quad \text{Koordinatentransformation (vgl. (1))}$$

von  $KS_1 \rightarrow KS_0$

$$({}^1p)^T = {}^1R_0 \cdot ({}^0p)^T \quad \text{Koordinatentransformation} \quad (4)$$

von  $KS_0 \rightarrow KS_1$  nach (1, 3)

- ▶  $p \cdot {}^0R_1$  (Rechtsmultiplikation)

$${}^1p = {}^0p \cdot {}^0R_1 \quad \text{Koordinatentransformation (vgl. (2))}$$

von  $KS_0 \rightarrow KS_1$

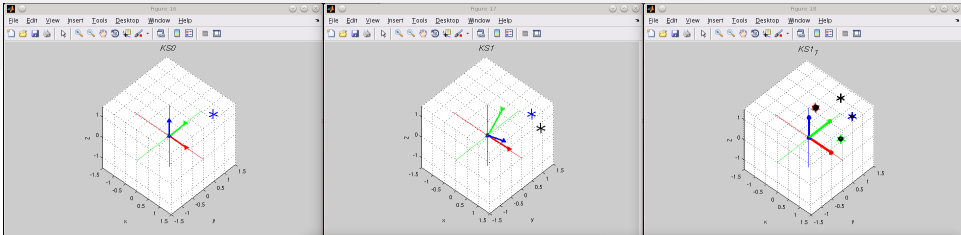
$${}^0p = {}^1p \cdot {}^1R_0 \quad \text{Koordinatentransformation} \quad (5)$$

von  $KS_1 \rightarrow KS_0$  nach (2, 3)



2.4 - Verknüpfung der Drehmatrizen

64-544 Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik



```

%%sphere centered at (p2) with scale
p2 = [1, 2];
p2 = p2 * Rm1;
fprintf('p = [%2f, %2f %2f]\n', p2(1), p2(2), p2(3));

Rm0 = transpose(Rm1);
fprintf('R(=rotation): OP = IP * Inv(R2*R1)\n');
p2 = p1;
p2 = p2 * Rm0;
fprintf('p = [%2f, %2f %2f]\n', p2(1), p2(2), p2(3));

Send % ko_1

function Rr = rot_x(alpha)
Rr = [1 0 0;
      0 cos(alpha) -sin(alpha) 0;
      0 sin(alpha) cos(alpha) 0;
      0 0 0 1];

Send

function Ry = rot_y(alpha)
Ry = [cos(alpha) 0 sin(alpha) 0;
      0 1 0 0;
      -sin(alpha) 0 cos(alpha) 0;
      0 0 0 1];

Send

function Rz = rot_z(alpha)
Rz = [cos(alpha) 0 -sin(alpha) 0;
      sin(alpha) 0 cos(alpha) 0;
      0 1 0 0;
      0 0 0 1];

Send
    
```

Command Window

```

New! MATLAB? Watch this Video, see Examples, or read Getting Started
singular
koor_trans.m
Test_rot.m

Run backtransformation analog ueber Rechtsmultiplikation
Rotation um X-Achse: 0° p = 1*p*Inv(rot_x(45°))
p_Alt = [0.29, 1.21 1.21]
p = [0.29, -0.00 1.71]
Rotation um Y-Achse: 0° p = 0°*p*Inv(rot_y(45°))
p_Alt = [0.29, -0.00 1.71]
p = [1.41, -0.00 1.00]
Rotation um Z-Achse: 0° p = 0°*p * Inv(rot_z(45°))
p_Alt = [1.41, -0.00 1.00]
p = [1.00, 1.00 1.00]
Gesamtrotation: OP = IP * Inv(R2*R1)*R0
p = [1.00, 1.00 1.00]

Workspace
Name Value
singular
koor_trans.m
Test_rot.m

Command History
11.03.2014 13:14:33
hugo (45, 45, 45)
hugo (90, 90, 90)
hugo (45, 90, 45)
hugo (10, 90, 50)
hugo (1, 90, 50)
hugo (6, 90, 50)
18.03.2014 08:35:03
hugo (45, 45, 45)
18.03.2014 15:19:38
QS_DH(0, 0, 0)
QS_DH(0, 45, 0)
QS_DH(0, 90, 0)
QS_DH(0, 0, 9)
QS_DH(10, 20, 19)
koor_trans(10, 20, 30)
koor_trans(45, 45, 45)
    
```



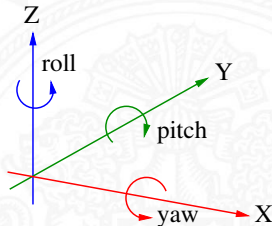
## Folge von Drehungen

Drehungen beziehen sich auf die **Hauptachsen** des **Ursprungs-koordinatensystems**: Sequentielle **Linksmultiplikationen** der Transformationsmatrizen nach Reihenfolge der Drehungen.

Beispiel: Rotation um X-Y-Z (RPY):

1. Drehung  $\psi$  um die x-Achse  $R_{x,\psi}$  (yaw)
2. Drehung  $\theta$  um die y-Achse  $R_{y,\theta}$  (pitch)
3. Drehung  $\phi$  um die z-Achse  $R_{z,\phi}$  (roll)

$$(\mathbf{a}'^T = R_{z(\phi)} \cdot R_{y(\theta)} \cdot R_{x(\psi)} \cdot \mathbf{a}^T)$$





## Verknüpfung der Drehmatrizen

$$X-Y-Z : \quad R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ 0 & S\psi & C\psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix}$$





## Folge von Drehungen (cont.)

Drehungen beziehen sich auf die neuen, jeweils **transformierten Achsen**:

Beispiel: Rotation um  $Z$ - $X'$ - $Z''$ :

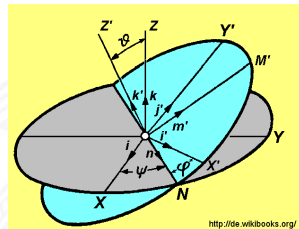
1. Drehung  $\psi$  um die  $z$ -Achse  $R_{Z,\psi}$
2. Drehung  $\theta$  um die aktuelle  $x$ -Achse  $R_{X',\theta}$
3. Drehung  $\phi$  um die aktuelle  $z$ -Achse  $R_{Z'',\phi}$

Anmerkung:

Obige Drehungen lassen sich auch durch Drehungen um die raumfesten (ungedrehten) Achsen, dann in umgekehrter Reihenfolge, verwirklichen.

1. Drehung um die  $Z$ -Achse um  $\phi$
2. Drehung um die  $X$ -Achse um  $\theta$
3. Drehung um die  $Z$ -Achse um  $\psi$

$$a' = R_{Z(\psi)} \cdot R_{X(\theta)} \cdot R_{Z(\phi)} \cdot a$$



<http://de.wikibooks.org/>



# Verknüpfung der Drehmatrizen

 $Z-X'-Z'' :$ 

um mitrotierte Achsen

$$R_{\psi,\theta,\phi} = R_{z,\psi} R_{x,\theta} R_{z,\phi}$$

um feste Achsen

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C\psi C\phi - S\psi C\theta S\phi & -C\psi S\phi - S\psi C\theta C\phi & S\psi S\theta \\ S\psi C\phi + C\psi C\theta S\phi & -S\psi S\phi + C\psi C\theta C\phi & -C\psi S\theta \\ S\theta S\phi & S\theta C\phi & C\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

*Bemerkung:* Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$AB \neq BA$$



## Folge von Drehungen, Beispiel

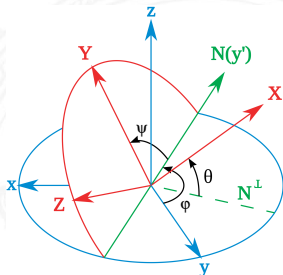
Rotationsfolge 1 (X Y' Z''):

1. Drehung um die  $x$ -Achse mit  $\psi = 50^\circ$
2. Drehung um die mitgedrehte  $y$ -Achse ( $y'$ ) mit  $\theta = 30^\circ$
3. Drehung um die erneut mitgedrehte  $z$ -Achse ( $z''$ ) mit  $\phi = 20^\circ$

Rotationsfolge 2 (YPR):

1. Drehung um die  $z$ -Achse mit  $\phi = 20^\circ$
2. Drehung um die  $y$ -Achse mit  $\theta = 30^\circ$
3. Drehung um die  $x$ -Achse mit  $\psi = 50^\circ$

(siehe Matlab: `fest_rot.m`)





## Rotation über feste/mitgedrehte Achsen

Rotationsfolge:  $R_x, R_y, R_z$

- ▶ 1. Rotation ( $R_x$ ) unproblematisch ( $R_x \cdot p^T = p'^T$ )
- ▶ 2. und folgende Rotation
  - ▶ auf Basiskoordinatensystem bezogen (feste Achsen):
    - ▶ Multiplikation von links ( $R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot p^T = p'''^T$ ); wie gehabt
  - ▶ auf lokales Koordinatensystem bezogen (mitgedrehte Achsen):
    - ▶ Beschreibung der Rotationen um mitgedrehte Achsen mittels Rotationen um feste Achsen beschreiben
    - ▶ Ausdrücken von  $R_x, R_{y'}$  und  $R_{z''}$  durch Rotationen im Ausgangskordinatensystem (feste Achsen)



## Rotation über feste/mitgedrehte Achsen (cont.)

Modellieren der Rotationen um Achsen des neuen, rotierten Koordinatensystems durch Rotationen um die festen Achsen des Ausgangskordinatensystems:

► Rotation um X-Achse:

1. Rotation um X-Achse:

$$R_x \cdot p^T = p'^T$$

► Rotation um die mitgedrehte Y-Achse:

Rücknahme der 1. Rotation

2. Rot. im Basiskoordinatensystem:

Wiederaufsetzen der 1. Rotation:

$$R_x^{-1} \cdot p'^T = p^T$$

$$R_y \cdot R_x^{-1} \cdot p'^T = R_y \cdot p^T$$

$$R_x \cdot R_y \cdot R_x^{-1} \cdot p'^T = R_x \cdot R_y \cdot p^T = p''^T$$

⇒ Drehung  $R_{y'}$  um neue Y-Achse  
mittels fester Rotationen:

$$R_{y'} = R_x \cdot R_y \cdot R_x^{-1}$$



## Rotation über feste/mitgedrehte Achsen (cont.)

- ▶ Rotation um die mitgedrehte Z-Achse:

Rücknahme der 1.u.2. Rotation

3. Rot. im Basiskoordinatensystem:

Wiederaufsetzen der 1.u.2. Rot.:

⇒ Drehung  $R_{z'}$  um neue Z-Achse  
 mittels fester Rotationen:

$$R_y^{-1} R_x^{-1} \cdot p''^T = p^T$$

$$R_z R_y^{-1} R_x^{-1} \cdot p''^T = R_z \cdot p^T$$

$$R_x R_y R_z R_y^{-1} R_x^{-1} \cdot p''^T = R_x R_y R_z \cdot p^T$$

$$R_{z'} = R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot R_y^{-1} \cdot R_x^{-1}$$

Gesamte Rotationsfolge:

$$\begin{aligned} R_{z'} R_{y'} R_{x'} \cdot p^T &= R_x R_y R_z R_y^{-1} R_x^{-1} \cdot R_x R_y R_x^{-1} \cdot R_x \cdot p^T \\ &= R_x R_y R_z \cdot p^T \end{aligned}$$

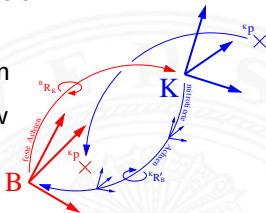
$$R_{z'} R_{y'} R_{x'} \cdot p^T = R_x R_y R_z \cdot p^T \quad (6)$$

## Beispiel: Körper nach Basis über mitgedrehte Achsen

Überführung des Körperkoordinatensystems ins Basiskoordinatensystem (Rotationen nach RPY)

- ▶ Rotationen um die neuen, mitgedrehten Achsen
- ▶ Reihenfolge der Rotationen: Roll – Pitch – Yaw

⇒ Rotationen:  ${}^K R_B$ ,  ${}^{K'} P_B$ ,  ${}^{K''} Y_B$



$${}^{K''} Y_B {}^{K'} P_B {}^K R_B \cdot p^T = {}^K R_B {}^K P_B {}^K Y_B \cdot p^T$$

nach (6)

$${}^K R_B {}^K P_B {}^K Y_B \cdot {}^B p^T = {}^K p^T$$

nach (4)

$${}^B p^T = {}^K Y_B^{-1} {}^K P_B^{-1} {}^K R_B^{-1} \cdot {}^K p^T$$

$${}^B p^T = {}^B Y_K {}^B P_K {}^B R_K \cdot {}^K p^T$$

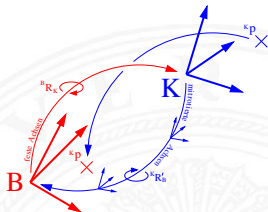
nach (3) (7)

# Beispiel: Körper nach Basis über mitrotierte Achsen (cont.)

oder:

$$\begin{aligned}
 {}^B P^T &= K Y_B^{-1} K P_B^{-1} K R_B^{-1} \cdot K P^T \\
 &= K Y_B^T K P_B^T K R_B^T \cdot K P^T \\
 {}^B P^T &= (K P \cdot K R_B K P_B K Y_B)^T \\
 {}^B P &= K P \cdot K R_B K P_B K Y_B
 \end{aligned}$$

(8)



Fazit:

Liegen die Transformationen zur Überführung z. B. des Körperkoordinatensystems in das Basiskoordinatensystem um die mitrotierten Achsen vor, so

- ▶ lassen sich daraus die Transformationen um die festen Achsen des Basissystems ableiten, mit denen das Körperkoordinatensystem erzeugt werden kann, wobei die Reihenfolge der Transformationen gleich bleibt (vgl. (7)), oder
- ▶ die vorliegenden Transformationen (Körper zu Basis) werden unter Beibehaltung der Reihenfolge der tatsächlichen Ausführung mittels Multiplikation von rechts direkt verwendet (vgl. (8)).





## Koordinaten-Transformation

- ▶ Matrizenmultiplikation mit einer  $3 \times 3$ -Matrix kann Rotation, Skalierung oder Scherung beschreiben
  - ▶ **aber:** Verschiebung (Translation) erfordert Vektoraddition
- ▶ Dies kann umgangen werden, indem eine weitere Spalte zur Matrix hinzugefügt wird ( $3 \times 4$ -Matrix).
  - ▶ **aber:** Die Matrix ist dann nicht mehr invertierbar
- ▶ Übergang nach  $\mathcal{R}^4$  ( $4 \times 4$ -Matrix), um sowohl Rotation, Translation, Scherung, Projektion, lokale und komplette Skalierung zu beschreiben
- ▶ Verwendung homogener Koordinaten



# Homogene Koordinaten

- ▶ *homogene Koordinaten* sind aus der Computergrafik bekannt
- ▶ die Punkte eines  $n$ -dimensionalen Raums werden in einem  $(n + 1)$ -dimensionalen Raum dargestellt
- ▶ aus  $p = (x, y, z) \in \mathcal{R}^3$  wird  $p' = (hx, hy, hz, h) \in \mathcal{R}^4$ , wobei  $h \neq 0 \in \mathcal{R}$

Beispiel:

$$(2, 5, 4) \in \mathcal{R}^3 \rightarrow \dots, (1, 2.5, 2, 0.5), \dots, (2, 5, 4, 1), \dots, (4, 10, 8, 2), \dots \in \mathcal{R}^4$$

- ▶ in der Robotik wird  $h = 1$  gewählt, was einer direkten Projektion zwischen  $n$ - und  $(n + 1)$ -dimensionalem Raum entspricht
- ▶  $h$  ist eine Art Skalierung



# Homogene Transformationen

$$H = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \textit{Rotation} \\ \textit{Scherung} \\ \textit{lokale Skalierung} \end{array} & \begin{array}{l} \textit{Translation} \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \\ \\ \textit{Projektion} \end{array} & \begin{array}{l} \\ \\ \textit{Skalierung} \end{array} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ \times & \times \\ & 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array} \right]$$



## Homogene Transformationen (cont.)

- ▶ In der Roboterkinematik ist man nur an Rotation und Translation interessiert. Daher ergibt sich:

$$H = \left[ \begin{array}{ccc|c} \textit{Rotation} & & & \textit{Translation} \\ \hline & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- ▶ mit  $\vec{p}$  und  $R$ :  $H = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{4 \times 4}$
- ▶ Verkettung mehrerer  $H$  über Matrixmultiplikation
- ▶ nicht kommutativ, d.h.  $A \cdot B \neq B \cdot A$



# Translation

Verschieben um Vektor  $p = [p_x, p_y, p_z]^T$ :

$$T_{(p_x, p_y, p_z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a'^T &= T_{(p_x, p_y, p_z)} \cdot a^T && \text{mit } a = [a_x, a_y, a_z, 1] \\ &= (a_x + p_x, a_y + p_y, a_z + p_z, 1)^T \end{aligned}$$



## Rotation um $x$ -Achse

Drehung um die  $x$ -Achse um den Winkel  $\psi$ :

$$R_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a'^T &= R_x(\psi) \cdot a^T \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \cdot \cos(\psi) - a_z \cdot \sin(\psi) \\ a_y \cdot \sin(\psi) + a_z \cdot \cos(\psi) \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



## Rotation um $y$ -Achse

Drehung um die  $y$ -Achse um den Winkel  $\theta$ :

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Rotation um z-Achse

Drehung um die z-Achse um den Winkel  $\phi$ :

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Verknüpfung der Drehmatrizen: XYZ

$$\begin{aligned}
 R_{\phi, \theta, \psi} &= R_{z, \phi} R_{y, \theta} R_{x, \psi} \\
 &= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi & 0 \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

*Bemerkung:* Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$AB \neq BA$$



## Verknüpfung der Drehmatrizen: $Z X' Z''$

$$R_{\psi,\theta,\phi} = R_{Z,\psi} R_{X',\theta} R_{Z'',\phi}$$

(nach Abbildung auf feste Achsen)

$$= \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\psi C\phi - S\psi C\theta S\phi & -C\psi S\phi - S\psi C\theta C\phi & S\psi S\theta & 0 \\ S\psi C\phi + C\psi C\theta S\phi & -S\psi S\phi + C\psi C\theta C\phi & -C\psi S\theta & 0 \\ S\theta S\phi & S\theta C\phi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Beispiel: Homogene Koordinaten

Punkte im Raum können beschrieben werden durch:

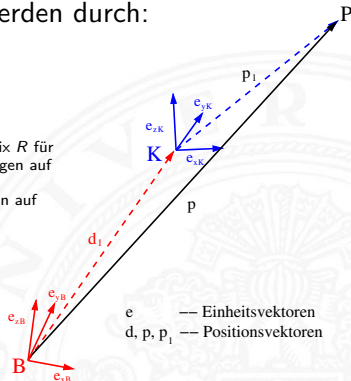
- ▶ Positionsvektoren
- ▶ Rotationsmatrix

$$\begin{aligned} {}^B p &= {}^B d_1 + {}^B p_1 \\ &= {}^B d_1 + {}^B R_K {}^K p_1 \end{aligned}$$

Hinweis:  
 ${}^B R_K$ : Rotationsmatrix  $R$  für  
 Frame  $K$  bezogen auf  
 Frame  $B$ .  
 ${}^K p$ : Vektor  $p$  bezogen auf  
 Frame  $K$ .

In homogenen Koordinaten:

$$\begin{aligned} {}^B p_{(H)} &= \begin{pmatrix} {}^B d_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} {}^B R_K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^K p_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^B R_K & {}^B d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^K p_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= {}^B H_K {}^K p_{(H)} \end{aligned} \quad (9)$$



$e$  --- Einheitsvektoren  
 $d, p, p_1$  --- Positionsvektoren

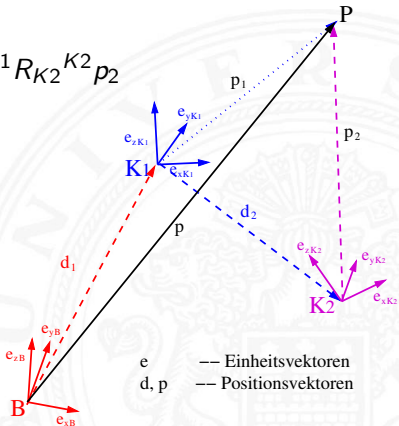
Hinweis:  
 ${}^B H_K$ : homogene Transformationsmatrix  $H$   
 für Frame  $K$  bezogen auf Frame  $B$ ;  
 ${}^K p_{(H)}$ : Punkt  $p$  in homogenen Koordinaten  
 bezogen auf Frame  $K$

## Beispiel: Homogene Koordinaten (cont.)

$$\begin{aligned}
 {}^B p &= {}^B d_1 + {}^B d_2 + {}^B p_2 \\
 &= {}^B d_1 + {}^B R_{K1} \cdot {}^{K1} d_2 + {}^B R_{K1} {}^{K1} R_{K2} {}^{K2} p_2
 \end{aligned}$$

In homogenen Koordinaten:

$${}^B p_{(H)} = {}^B H_{K1} \quad {}^{K1} H_{K2} \quad {}^{K2} p_{2(H)}$$



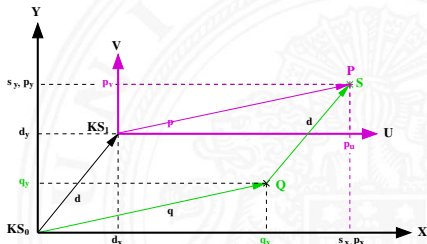


# Koordinatensystemtransformationen vs. Koordinatentransformationen

Beispiel: 2D-Raum, beschränkt auf Translationen  
 Erzeugen des  $KS_1$  aus  $KS_0$

- ▶ Verschieben des Ursprunges:  
Translation um  $d = (d_x, d_y)$
- ▶ homogene Transformation:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





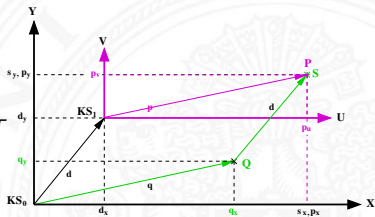
# Koordinatensystemtransformationen vs. Koordinatentransformationen (cont.)

Anwenden der Transformation  ${}^0T_1$

- ▶ auf einen Punkt  $Q = (q_x, q_y)$  des  $KS_0$ :

$$\begin{aligned}
 (Q'_{(H)})^T &= {}^0T_1 ({}^0Q_{(H)})^T \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= ((q_x + d_x), (q_y + d_y), 1)^T \\
 &= (s_x, s_y, 1)^T \\
 Q'_{(H)} &= {}^0S_{(H)}
 \end{aligned}$$

- ▶ Verschieben des Punktes im  $KS_0$



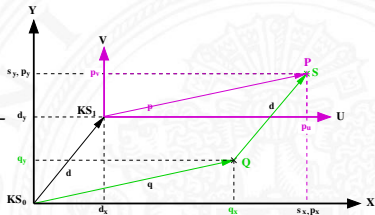


# Koordinatensystemtransformationen vs. Koordinatentransformationen (cont.)

Anwenden der Transformation  ${}^0T_1$

- ▶ auf einen Punkt  $P = (p_u, p_v)$  des  $KS_1$ :

$$\begin{aligned}
 (P'_{(H)})^T &= {}^0T_1 ({}^1P_{(H)})^T \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= ((p_u + d_x), (p_v + d_y), 1)^T \\
 &= (p_x, p_y, 1)^T \\
 P'_{(H)} &= {}^0P_{(H)}
 \end{aligned}$$



- ▶ Transformation der Koordinaten aus  $KS_1$  nach  $KS_0$



## Koordinaten-Frames

Sie werden über die Elemente der homogenen Transformation als vier Vektoren dargestellt.

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$





## Inverse Transformationen

Die Inverse einer Drehmatrix ist einfach ihre Transponierte:

$$R^{-1} = R^T \text{ und } RR^T = E$$

wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist.

Die Inverse von (10) ist:

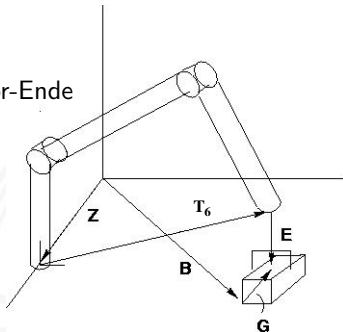
$$H^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{r}_1 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{r}_2 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{r}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  und  $\mathbf{p}$  die vier Spaltenvektoren von (10) sind und  $\cdot$  das Skalarprodukt von Vektoren darstellt.

# Relativtransformationen

Man hat die folgenden Transformationen:

- ▶  $Z$ : Welt  $\rightarrow$  Manipulator-Basis
- ▶  $T_6$ : Manipulator-Basis  $\rightarrow$  Manipulator-Ende
- ▶  $E$ : Manipulator-Ende  $\rightarrow$  Endeffektor
- ▶  $B$ : Welt  $\rightarrow$  Objekt
- ▶  $G$ : Objekt  $\rightarrow$  Endeffektor



## Gleichung der Transformation

Es gibt zwei Beschreibungen der Position des Endeffektors, eine in Bezug auf das Objekt und die andere auf den Manipulator. Sie beschreiben die gleiche Sache:

$$ZT_6E = BG$$



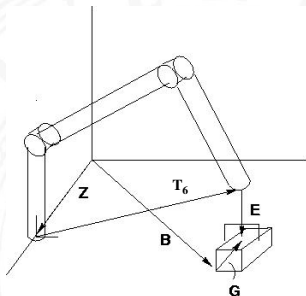
Um die Manipulator-Transformation zu finden:

$$T_6 = Z^{-1}BGE^{-1}$$

Um die Position des Objekts zu bestimmen:

$$B = ZT_6EG^{-1}$$

Dies wird auch als kinematische Kette bezeichnet.





## Zusammenfassung der homogenen Transformationen

- ▶ Eine homogene Transformation beschreibt die Position und Orientierung eines Koordinaten-Frames im Raum.
- ▶ Wenn der Koordinaten-Frame bezüglich eines Festkörpers definiert wird, ist die Position und Orientierung des Festkörpers auch eindeutig spezifiziert.
- ▶ Eine homogene Transformation kann in eine Rotation und in eine Translation zerlegt werden.
- ▶ Mehrere Translationen und Rotationen können unter Beachtung der Reihenfolge zu einer homogenen Transformation zusammengefasst werden.



# Agenda

## 2. Grundlagen der Robotik

Grundbegriffe

Roboterklassifikation

Koordinatensysteme

Verknüpfung der Drehmatrizen

Homogene Transformationen

Koordinaten-Frames

Zusammenfassung der homogenen Transformationen

**Roboterkinematik**

Literatur



# Roboterkinematik

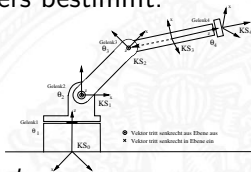
Kinematik eines Roboters:

- ▶ Transformationsvorschrift, die den Zusammenhang zwischen den Gelenkkoordinaten eines Roboters  $\mathbf{q}$  und den Umweltkoordinaten des Endeffektors  $\mathbf{x}$  beschreibt.

Sie wird nur durch die Geometrie des Roboters bestimmt.

- ▶ Basisframe
- ▶ Bezug konsekutiver Frames zueinander  
 $\implies$  Bildung einer rekursiven Kette
- ▶ Gelenkkoordinate:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & : \text{Gelenk } i \text{ rotatorisch} \\ d_i & : \text{Gelenk } i \text{ translatorisch} \end{cases}$$



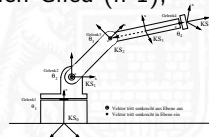
- ▶ Ziel: absolute Bestimmung der Position des Endeffektors (Tool Center Point, TCP) im kartesischen Koordinatensystem der Basis

# Kinematik-Gleichungen

- ▶ Manipulator: eine Reihe von Gliedern über Gelenke verbunden
- ▶ jedes Glied bekommt eigenen Koordinaten-Frame
- ▶ homogene Matrix  ${}^{i-1}A_i$  beschreibt relative Translation und Rotation zwischen zwei aufeinander folgenden Gelenken (Gelenkübergang).
- ▶ Beispiel: Manipulator mit n Gelenken:
  - ${}^0A_1$ : Position und Orientierung des 1. Gliedes bezüglich Basis
  - ${}^1A_2$ : Position und Orientierung des 2. Gliedes bezüglich Glied 1
  - ${}^2A_3$ : Position und Orientierung des 3. Gliedes bezüglich Glied 2
  - $\vdots$
  - ${}^{n-1}A_n$ : Position und Orientierung Glied n bezüglich Glied (n-1);

Das folgende Produkt wird definiert als:

$$T_6 = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{n-2}A_{n-1} {}^{n-1}A_n$$





## Festlegung der Gelenkkoordinatensysteme

- ▶ Ziel: Berechnung von  $T_6 = \prod_{i=1}^n A_i$   $A_i$  Kurzform für  ${}^{i-1}A_i$ 
  - ▶  $T_6$  definiert, wie die  $n$  Gelenkübergänge zusammenzufassen sind, um 6 kartesische Freiheitsgrade zu beschreiben.
- ▶ Festlegung eines Koordinatensystems (KS) pro Segment  $i$ 
  - ▶ Zuordnung KS zu Gelenk grundsätzlich beliebig
- ▶ Ermittlung der Transformation  $A_i$  pro Segment  $i = 1..n$ 
  - ▶ grundsätzlich 6 Parameter (3 Rotationen + 3 Translationen) erforderlich
  - ▶ jedoch unterschiedliche Parametersätze und Transformationsabfolgen möglich
- ▶ ein mögliches Schema: **Denavit-Hartenberg** (D-H) Konvention





## Denavit Hartenberg Konvention

- ▶ erste Publikationen von Denavit und Hartenberg in 1955
- ▶ etabliertes Verfahren
- ▶ Festlegung einer Transformationsmatrix  $A_i$  ( $={}^{i-1}A_i$ ) über nur **vier** Parameter
  - ▶ Gelenklänge, Gelenkverwindung, Gelenk-Offset und Gelenkwinkel  
 $(a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i)$
- ▶ Transformationsmatrix  $A_i$  ist das Produkt von vier elementaren Transformationen:

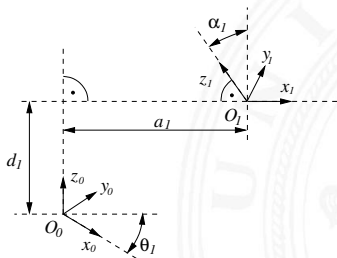
$$A_i = R_z(\theta_i) \cdot T_z(d_i) \cdot T_x(a_i) \cdot R_x(\alpha_i)$$

# Denavit Hartenberg Konvention

- Idee: Bestimmung der Transformationsmatrix  $A_i$  mittels vier Gelenkparameter  $(\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i)$  und zwei Vorbedingungen:

DH1: die Achse  $x_i$  verläuft senkrecht zur Achse  $z_{i-1}$

DH2: die Achse  $x_i$  schneidet die Achse  $z_{i-1}$



$$A_1 = R_z(\theta_1) \cdot T_z(d_1) \cdot T_x(a_1) \cdot R_x(\alpha_1)$$



## Hintergrund zu DH-Konvention

- ▶ aus DH 1 folgt:  $x_1 \cdot z_0 = 0$

$$\begin{aligned}
 0 &= {}^0x_1 \cdot {}^0z_0 \\
 &= \left( \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= [r_{11} \quad r_{21} \quad r_{31}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= r_{31}
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- ▶ wegen  ${}^{i-1}R_i$  orthogonal u. orthonormal (Länge der Zeilen- u.

Spaltenvektoren = 1) gilt:

$$\begin{aligned}
 r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1 \\
 r_{32}^2 + r_{33}^2 &= 1
 \end{aligned}$$

$(r_{11}, r_{21}) = (\cos \theta, \sin \theta)$  und

$(r_{32}, r_{33}) = (\sin \alpha, \cos \alpha)$

erfüllen Bedingung;

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & r_{12} & r_{13} \\ \sin \theta & r_{22} & r_{23} \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

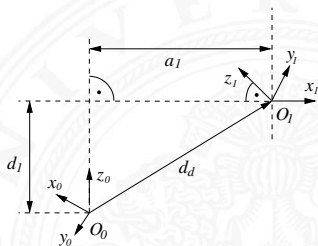
- ▶  $r_{12}, r_{13}, r_{22}$  und  $r_{23}$  lassen sich zur Rotationsmatrix ergänzen



## Hintergrund zu DH-Konvention (cont.)

- aus DH2 mit DH1 folgt: der Positionsvektor  $d_d$  von  $O_0$  zu  $O_1$  lässt sich als Linearkombination der Vektoren  $z_0$  und  $x_1$  darstellen:

$$\begin{aligned}
 {}^0d_d &= d^0z_0 + a^0x_1 \\
 &= d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a^0R_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a \cos\theta \\ a \sin\theta \\ d \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$





## Hintergrund zu DH-Konvention (cont.)

- ▶ homogene Transformationsmatrix  $A_i$  erfüllt DH1 und DH2

$$\begin{aligned}
 A_i &= R_z(\theta_i) \cdot T_z(d_i) \cdot T_x(a_i) \cdot R_x(\alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



## Abfolge der Einzeltransformationen

Berechnung der homog. Transformationsmatrix  $A_1 (= {}^0A_1)$  aus den Einzeltransformationen  $R_z(\theta_1)$ ,  $T_z(d_1)$ ,  $T_x(a_1)$  und  $R_x(\alpha_1)$

► Überführung  $KS_0$  nach  $KS_1$  über lokale Achsen

► Invarianzen

►  $T_x$  invariant zu  $R_x$  ( $T_x R_x = R_x T_x$ )

►  $T_z$  invariant zu  $R_z$  ( $T_z R_z = R_z T_z$ )

► Rotationsfolge

► Rotation um  $Z_1$  nach erfolgter Rotation um  $X$  verletzt DH2;

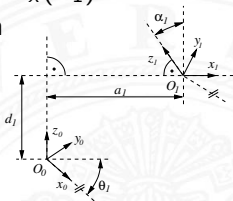
somit eine mögliche Folge, die weder DH1 noch DH2 verletzt:

$$\begin{aligned} A_i &= R_{x1'''}(\alpha_1) \cdot T_{x1''}(a_1) \cdot T_{z1'}(d_1) \cdot R_z(\theta_1) \\ &= R_z(\theta_i) \cdot T_z(d_i) \cdot T_x(a_i) \cdot R_x(\alpha_i) \end{aligned}$$

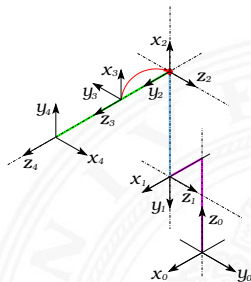
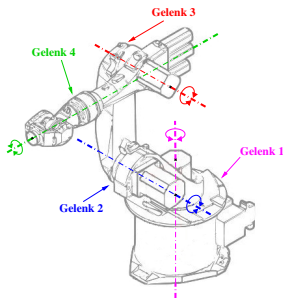
vgl. (6)

► ist eine mögliche, gültige Transformationsfolge

► ist die Standard-Transformationsfolge



# Festlegung der Koordinatensysteme

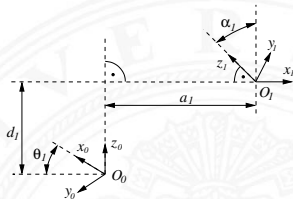


- ▶  $z_i$ -Achse: entlang der Bewegungsachse des  $(i+1)$ -ten Gelenks
- ▶  $x_i$ -Achse: senkrecht zur  $z_{i-1}$ -Achse, schneidet diese und zeigt von ihr weg
- ▶  $y_i$ -Achse. zum rechtshändigen Koordinatensystem ergänzen

## Festlegung der Koordinatensysteme: Sonderfälle

**Achtung:** Die Denavit-Hartenberg Notation ist nicht eindeutig!

- ▶  $z_{i-1}$  liegt parallel zu  $z_i$ 
  - ▶ beliebig viele kürzeste Normale
  - ▶ meist Wahl, dass  $d_i = 0$
- ▶  $z_{i-1}$  und  $z_i$  schneiden sich
  - ▶ meist Wahl, dass  $KS_i$  im Schnittpunkt
  - ▶ meist Wahl, dass  $a_i = 0$
- ▶ Lage von  $KS_n$  nicht eindeutig, da kein Gelenk  $n + 1$  existiert;  $x_n$  muss aber trotzdem auf einer Normalen zu  $z_{n-1}$  liegen; übliche Wahl:  $z_n$  zeigt "aus Hand heraus"



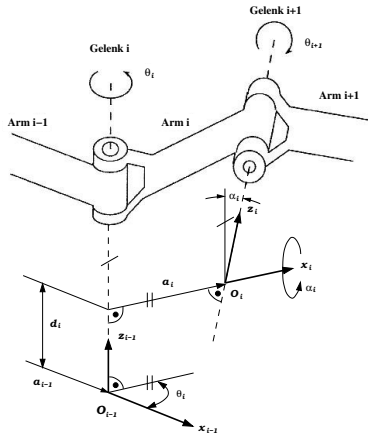


## Abbildung der Parameter auf die Gelenkstruktur

Zwei Parameter zur Beschreibung der Struktur des Gelenkes  $i$ :

- ▶  $a_i$ : die kürzeste Entfernung zwischen der  $z_{i-1}$ -Achse und der  $z_i$ -Achse
- ▶  $\alpha_i$ : der Drehwinkel um die  $x_i$ -Achse, der die  $z_{i-1}$ -Achse auf die  $z_i$ -Achse ausrichtet

$a_i, \alpha_i$  – konstant, konstruktionsbedingt



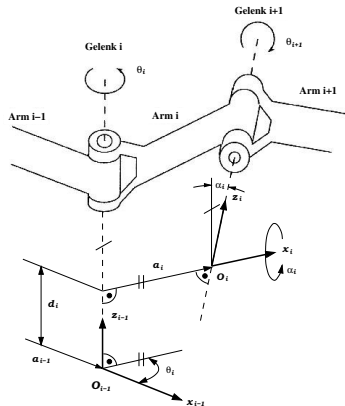
## Abbildung der Parameter auf die Gelenkstruktur (cont.)

Zwei Parameter zur Bestimmung der relativen Distanz und Winkel der benachbarten Gelenke:

- ▶  $d_i$ : Entfernung Ursprung  $O_{i-1}$  des  $(i-1)$ -ten KS zu Schnittpunkt der  $z_{i-1}$ -Achse mit der  $x_i$ -Achse.
- ▶  $\theta_i$ : Gelenkwinkel um die  $z_{i-1}$ -Achse zur parallelen Ausrichtung von  $x_{i-1}$ - und  $x_i$ -Achse in der  $x_{i-1}, y_{i-1}$ -Ebene.

$\theta_i, d_i$  – variabel

- ▶ Rotationsgelenk:  $\theta_n$  variabel,  $d_n$  fix
- ▶ Translationsgelenk,  $d_n$  variabel,  $\theta_n$  fix



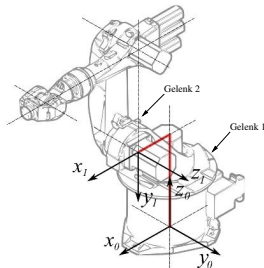
## Beispiel: Bestimmung der DH-Parameter eines Gelenkes

Bestimmung der DH-Parameter  $(\theta, d, a, \alpha)$  zur Berechnung der Gelenktransformation:  $A_1 = R_z(\theta_1)T_z(d_1)T_x(a_1)R_x(\alpha_1)$

- ▶ Gelenkwinkel: Rotation  $\theta_1$  um die  $z_0$ -Achse, damit die  $x_0$ -Achse parallel zu der  $x_1$ -Achse liegt

$$R_z(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

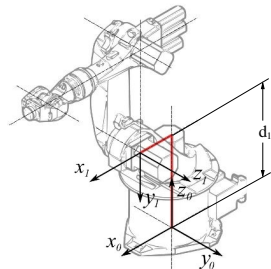
in der gezeigten Gelenkstellung ist  $\theta_1 = 0^\circ$



## Beispiel: Bestimmung der DH-Parameter (cont.)

- ▶ Gelenkabstand: Translation  $d_1$  entlang der  $z_0$ -Achse bis zum Schnittpunkt von  $z_0$ -Achse und  $x_1$ -Achse

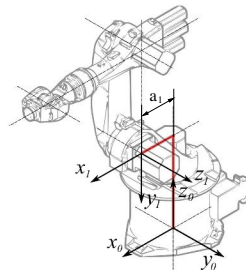
$$T_z(d_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Beispiel: Bestimmung der DH-Parameter (cont.)

- ▶ Armlänge: Translation  $a_1$  entlang der  $x_1$ -Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen

$$T_x(a_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

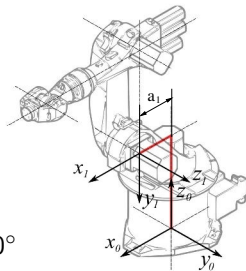


## Beispiel: Bestimmung der DH-Parameter (cont.)

- ▶ Verwindung: Rotation  $\alpha_1$  um die  $x_1$ -Achse, um die  $z_0$ -Achse in die  $z_1$ -Achse zu überführen

$$R_{x(\alpha_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bei der gezeigten Gelenkkonfiguration ist  $\alpha_1 = -90^\circ$   
 und konstruktionsbedingt fest





## Beispiel: Bestimmung der DH-Parameter (cont.)

- ▶ Gesamttransformation von  $KS_0$  nach  $KS_1$  (allgemein):

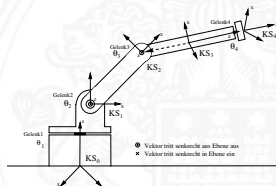
$$\begin{aligned}
 {}^0A_1 &= R_z(\theta_1) \cdot T_z(d_1) \cdot T_x(a_1) \cdot R_x(\alpha_1) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \cos\alpha_1 & \sin\theta_1 \sin\alpha_1 & a_1 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \cos\alpha_1 & -\cos\theta_1 \sin\alpha_1 & a_1 \sin\theta_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- ▶ hier Rotationsgelenk:  $\theta_1$  - variabel und  $d_1, a_1$  und  $(\alpha_1 = -90^\circ)$  fix:

$$\begin{aligned}
 {}^0A_1 &= R_z(\theta_1) \cdot T_z(d_1) \cdot T_x(a_1) \cdot R_x(-90^\circ) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & a_1 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & a_1 \sin\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Vorgehen bei gegebener Struktur

- ▶ Ausgangspunkt: Das Koordinatensystem  $A_0$  ist das ortsfeste Ausgangskordinatensystem in der Basis des Manipulators
- ▶ Gelenkachsen bestimmen und von 1 bis  $n$  durchnummerieren
- ▶  $KS_{i-1}$  auf Dreh- bzw. Schubachse  $i$  positionieren,  $z_{i-1}$  zeigt in Achsrichtung  $i$
- ▶ Normale zwischen den Gelenkachsen bestimmen;  $x_i$  festlegen (in Richtung der Normalen)
- ▶  $y_i$  bestimmen (Rechtssystem)
- ▶ Denavit-Hartenberg Parameter ablesen
- ▶ Gesamttransformation berechnen

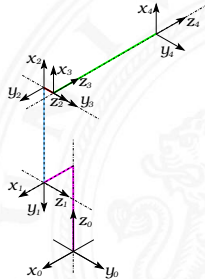
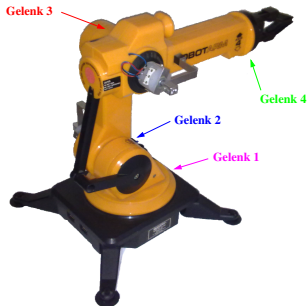




## Beispiel: Bestimmung der Transformationsmatrix $T_6$

Beispiel: Bestimmung der homogenen Transformationsmatrix  $T_6$  für einen gegebenen Manipulatorarm

- Festlegung der Koordinatensysteme nach DH-Konvention



# Beispiel: Bestimmung der Transformationsmatrix $T_6$ (cont.)

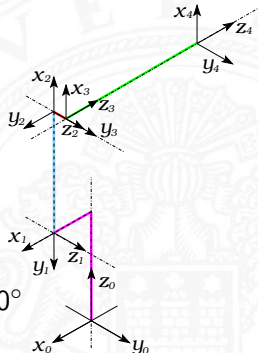
- ▶ DH-Parameter des Spielzeugarmes

| $i$ | $a$ | $\alpha$    | $d$ | $\theta$   |
|-----|-----|-------------|-----|------------|
| 1   | 20  | $-90^\circ$ | 100 | $\theta_1$ |
| 2   | 160 | $0^\circ$   | 0   | $\theta_2$ |
| 3   | 0   | $+90^\circ$ | 28  | $\theta_3$ |
| 4   | 0   | $0^\circ$   | 250 | $\theta_4$ |

$a, d$  in mm

- ▶ abgebildete Position:

$$\theta_1 = \theta_3 = \theta_4 = 0 \text{ und } \theta_2 = -90^\circ$$



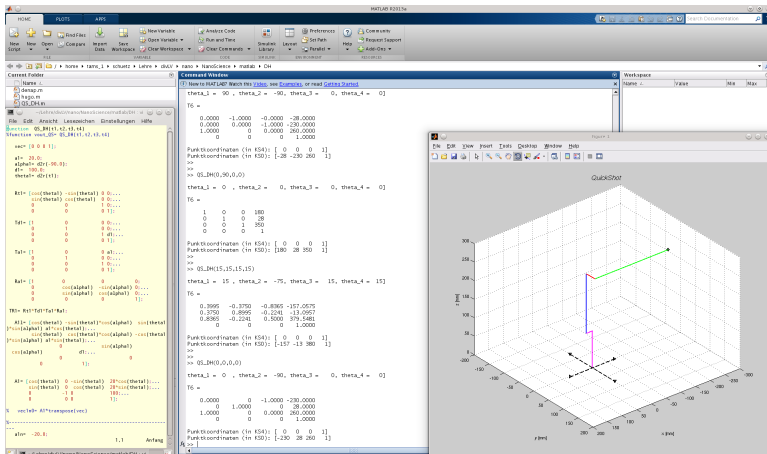


## Beispiel: Bestimmung der Transformationsmatrix $T_6$ (cont.)

$$\begin{aligned}
 T_6 &= A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 20 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 20 \sin \theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 160 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 160 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & -\cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) - \sin \theta_1 \sin \theta_4 & \dots \\ \sin \theta_1 \cos \theta_4 (\sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3) + \cos \theta_1 \sin \theta_4 & \dots \\ -\cos \theta_4 (\sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



# Beispiel: Bestimmung der Transformationsmatrix $T_6$ (cont.)



The screenshot shows a MATLAB R2014a environment with the following content:

**Workspace:**

```
theta_1 = 90, theta_2 = -90, theta_3 = 0, theta_4 = 0
T6 =
    0.0000    -1.0000    -0.0000   -28.0000
    0.0000    0.0000   -1.0000   -230.0000
    1.0000    0.0000    0.0000   260.0000
         0         0         0         1.0000
```

**Command Window:**

```
theta_1 = 90, theta_2 = -90, theta_3 = 0, theta_4 = 0
T6 =
    0.0000    -1.0000    -0.0000   -28.0000
    0.0000    0.0000   -1.0000   -230.0000
    1.0000    0.0000    0.0000   260.0000
         0         0         0         1.0000
Punkt koordinaten (in K54): [ 0 0 0 1]
Punkt koordinaten (in K50): [-28 -230 260 1]
>>
>> QS_DH(0,260,0,0)
theta_1 = 0, theta_2 = 0, theta_3 = 0, theta_4 = 0
T6 =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
Punkt koordinaten (in K54): [ 0 0 0 1]
Punkt koordinaten (in K50): [180 28 350 1]
>>
>> QS_DH(15,15,15,15)
theta_1 = 15, theta_2 = -75, theta_3 = 15, theta_4 = 15
T6 =
    0.3995   -0.3750   -0.8365  -157.0575
    0.3750    0.8995   -0.2241  -13.0957
    0.8365   -0.2241    0.5000   379.5481
         0         0         0         1.0000
Punkt koordinaten (in K54): [ 0 0 0 1]
Punkt koordinaten (in K50): [-157 -13 380 1]
>>
>> QS_DH(0,0,0,0)
theta_1 = 0, theta_2 = -90, theta_3 = 0, theta_4 = 0
T6 =
    0.0000     1     0   -1.0000   -230.0000
    0.0000     0     1     0.0000    260.0000
    1.0000     0     0     0.0000    260.0000
         0     0     0     0.0000    1.0000
Punkt koordinaten (in K54): [ 0 0 0 1]
Punkt koordinaten (in K50): [-120 28 260 1]
>>
```

**QuickPlot:** A 3D plot showing the robot arm's configuration. The axes are labeled x [mm], y [mm], and z [mm]. The plot shows a vertical axis (z) and two horizontal axes (x and y). A green line represents the end effector's position, and a purple line represents the base. The plot is titled "QuickShot".



# Position

$T_6$  definiert, z. B. bei einem Manipulator mit ausschließlich Rotationsgelenken, wie die  $n$  Gelenkwinkel zusammenzufassen sind, um 6 kartesische Freiheitsgrade zu beschreiben.

- ▶ **Vorwärtskinematik  $K$**  definiert als:
  - ▶  $K : \vec{\theta} \in \mathcal{R}^n \rightarrow \vec{x} \in \mathcal{R}^6$
  - ▶ Gelenkwinkel  $\rightarrow$  Position + Orientierung
- ▶ **Inverse Kinematik  $K^{-1}$**  definiert als:
  - ▶  $K^{-1} : \vec{x} \in \mathcal{R}^6 \rightarrow \vec{\theta} \in \mathcal{R}^n$
  - ▶ Position + Orientierung  $\rightarrow$  Gelenkwinkel
  - ▶ nichttrivial, weil  $K$  i.A. nicht eindeutig invertierbar



# Bahnplanung

Da  $T_6$  nur die Ziel**position** beschreibt, ist explizite Generierung einer Trajektorie nötig, je nach *constraints* unterschiedlich für:

- ▶ Gelenkwinkelraum
- ▶ kartesischen Raum

Interpolation durch:

- ▶ stückweise Geraden
- ▶ stückweise Polynome
- ▶ B-Splines
- ▶ ...

Diese Aspekte werden wegen der beschränkten Zeit nicht weiter vertieft. Siehe hierzu relevante Veranstaltungen unter:  
<http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/lectures/>

**[Cra04] John J. Craig:**

*Introduction to Robotics: Mechanics and Control (3rd Edition).*

3.

Prentice Hall, August 2004. –  
ISBN 0201543613

**[Pau82] Richard P. Paul:**

*Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control.*

1st.

MIT Press; Cambridge, MA, USA, 1982. –  
ISBN 026216082X