Aufgabenblatt 7 Ausgabe: 22.11., Abgabe: 29.11. 12:00

Gruppe	
Name(n)	Matrikelnummer(n)

Aufgabe 7.1 (Punkte 10 + 10)

Codierung: Auf dem letzten Aufgabenblatt sollten Sie einen einen zyklisch-einschrittigen Binärcode für 30 Winkelstellungen einer Codierscheibe entwickeln.

(a) Erläutern Sie, warum es immer eine gerade Anzahl von Codewörtern sein muss und es keinen zyklisch-einschrittigen Binärcode mit ungerader Zahl von Codewörtern geben kann.

(b) Neben zyklisch-einschrittigen Codes sind auch zyklisch-zweischrittige Codes denkbar, d.h. zwei aufeinander folgende Codeworte unterscheiden sich immer in genau zwei Stellen. Aus der Vorlesung wissen Sie, wie man einen zyklisch-einschrittigen Code konstruieren kann. Wie lässt sich aus diesem Code ein zyklisch-zweischrittiger Code gewinnen? Konstruieren Sie mit ihrem Algorithmus einen zyklisch-zweischrittigen Code mit 5 Codeworten.

Aufgabe 7.2 (Punkte 5+5+10+5+5+5+10)

Ein einfacher Code: Wir wollen über eine Leitung Nachrichten übertragen, die in drei Bits a_1, a_2, a_3 codiert sind. Weil wir befürchten, dass bei der Übertragung Fehler auftreten können, fügen wir noch drei Kontrollbits hinzu, die sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_2 \oplus a_3 \\ a_5 &= a_1 \oplus a_3 \\ a_6 &= a_1 \oplus a_2 \end{aligned}$$

(a) Erstellen Sie eine Liste aller 8 möglichen 6-Bit-Worte des dadurch gewonnenen Codes.

(b) Welchen Hamming-Abstand hat dieser Code? Wieviele Fehler können mit dem Code erkannt bzw. korrigiert werden?

(c) Fehler modellieren wir so, dass wir uns vorstellen, dass auf ein korrektes Codewort $(a_i, i = 1 \ldots 6)$ ein Fehlervektor $(e_i, i = 1 \ldots 6)$ "hinzuaddiert" wird, wobei die e_i natürlich auch alle 0 sein können, falls kein Fehler auftritt. Beim Empfänger kommt also nicht der Vektor (a_i) an, sondern ein Vektor $(b_i) = (a_i \oplus e_i)$. Der Empfänger berechnet nun die Werte

$$\begin{aligned} s_1 &= b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \\ s_2 &= b_1 \oplus b_3 \oplus b_5 \\ s_3 &= b_1 \oplus b_2 \oplus b_6 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} s_1 &= e_2 \oplus e_3 \oplus e_4 \\ s_2 &= e_1 \oplus e_3 \oplus e_5 \\ s_3 &= e_1 \oplus e_2 \oplus e_6 \end{aligned}$$

(d) Welchen Wert für die s_i erhalten Sie, wenn kein Fehler bei der Übertragung aufgetreten ist?

(e) Welchen Wert haben die s_i, falls nur das Bit b_1 fehlerhaft ist? Welche Werte haben die s_i, falls genau eins der anderen Bits fehlerhaft ist? Sie sollten also eine Tabelle erhalten, die sagt, welchen Wert der Vektor (s_i) hat, wenn im Bit b_k (und nur dort!) ein Fehler aufgetreten ist.

(f) Was lässt sich schließen, falls Sie $s = (1, 1, 1)$ erhalten?

(g) Decodieren Sie folgende vier Vektoren (b_i), d.h. korrigieren Sie, wenn nötig, mögliche Fehler, die bei der Übertragung entstanden sind: $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1, 1, 1)$ und $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Aufgabe 7.3 (Punkte 10+5+10+10)

2D-Paritätscode: Wir betrachten den in der Vorlesung vorgestellten zweidimensionalen Paritätscode. Jeweils 64 Datenbits werden als Matrix mit 8×8 Zeilen und Spalten notiert, und zu jeder Zeile und Spalte wird ein ungerades Paritätsbit hinzugefügt. Außerdem wird noch ein weiteres Bit ganz unten rechts bestimmt, dass sich als Paritätsbit der Spalten-Paritätsbits berechnet:

$d_{0,0}$	$d_{0,1}$	$d_{0,2}$	$d_{0,3}$	$d_{0,4}$	$d_{0,5}$	$d_{0,6}$	$d_{0,7}$	$p_{0,8}$
$d_{1,0}$	$d_{1,1}$	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	$d_{1,5}$	$d_{1,6}$	$d_{1,7}$	$p_{1,8}$
$d_{2,0}$	$d_{2,1}$	$d_{2,2}$	$d_{2,3}$	$d_{2,4}$	$d_{2,5}$	$d_{2,6}$	$d_{2,7}$	$p_{2,8}$
$d_{3,0}$	$d_{3,1}$	$d_{3,2}$	$d_{3,3}$	$d_{3,4}$	$d_{3,5}$	$d_{3,6}$	$d_{3,7}$	$p_{3,8}$
$d_{4,0}$	$d_{4,1}$	$d_{4,2}$	$d_{4,3}$	$d_{4,4}$	$d_{4,5}$	$d_{4,6}$	$d_{4,7}$	$p_{4,8}$
$d_{5,0}$	$d_{5,1}$	$d_{5,2}$	$d_{5,3}$	$d_{5,4}$	$d_{5,5}$	$d_{5,6}$	$d_{5,7}$	$p_{5,8}$
$d_{6,0}$	$d_{6,1}$	$d_{6,2}$	$d_{6,3}$	$d_{6,4}$	$d_{6,5}$	$d_{6,6}$	$d_{6,7}$	$p_{6,8}$
$d_{7,0}$	$d_{7,1}$	$d_{7,2}$	$d_{7,3}$	$d_{7,4}$	$d_{7,5}$	$d_{7,6}$	$d_{7,7}$	$p_{7,8}$
$p_{8,0}$	$p_{8,1}$	$p_{8,2}$	$p_{8,3}$	$p_{8,4}$	$p_{8,5}$	$p_{8,6}$	$p_{8,7}$	$p_{8,8}$

(a) Wie groß ist die Minimaldistanz d dieses Codes? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Können mit diesem Code alle Einbitfehler, Zweibitfehler, und Dreibitfehler erkannt und korrigiert werden? Warum?

(c) Geben Sie ein Beispiel für einen Vierbitfehler, der vom Code nicht erkannt wird.

(d) Wie viele verschiedene Vierbitfehler der in (c) ermittelten Art gibt es? Wie groß ist der Anteil dieser Fehler in Relation zur Gesamtanzahl der möglichen Vierbitfehler?