64-544
Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2012ss/vorlesung/GdSR

Jianwei Zhang

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

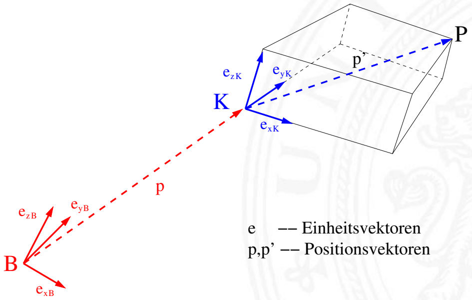
Sommersemester 2012

Gliederung

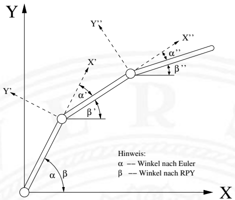
Agenda

Koordinatensysteme

Die Lage von Gegenständen, also ihre **Position** und **Orientierung** im euklidischen Raum, lässt sich beschreiben durch Angabe eines kartesischen Koordinatensystems (KS) hier K und der Angabe der Transformation zwischen diesem und dem Ursprungs-Koordinatensystem hier B.



Beschreibung von Position und Orientierung eines Objektes



`Position` (Objekt-Koordinaten):

- gegeben durch $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T \in \mathcal{R}^3$

`Orientierung:`

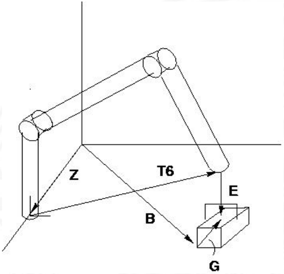
- Euler-Winkel ϕ, θ, ψ
  - Drehungen werden nacheinander um die Achsen der neuen Koordinatensysteme durchgeführt; z. B. $ZX'Z''$
  - Dreh– oder Rotationsmatrix $R \in \mathcal{R}^{3\times3}$:
  - redundant; 9 Parameter bei $f = 3$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Roll-Pitch-Yaw
  - auf Objektkoordinatensystem bezogen (in Luft- u. Seefahrt üblich)
  - Rotationen erfolgen auf die unveränderten Achsen (X Rollen, Y Nicken, Z Gieren)

Koordinaten-Transformation

- Überführung von Koordinatensystemen:
  Frame: ein Bezugskoordinatensystem
  Typische Frames:
  - Roboterbasis
  - Endeffektor
  - Tisch (Welt)
  - Objekt
  - Kamera
  - Bildschirm
  - ...



Frame-Transformationen überführen einen Frame in einen anderen.

Koordinaten-Transformation (cont.)

- Matrizenmultiplikation mit einer 3×3-Matrix kann Rotation, Skalierung oder Scherung beschreiben
  - **Aber:** Verschiebung (Translation) erfordert Vektoraddition
- Dies kann umgangen werden, indem eine weitere Spalte zur Matrix hinzugefügt wird.
  - **Aber:** Die Matrix ist dann nicht mehr invertierbar
- Übergang nach $\mathcal{R}^4$ (4×4-Matrix), um sowohl Rotation, Translation, Scherung, Projektion, lokale und komplette Skalierung zu beschreiben
- Verwendung homogener Koordinaten

Homogene Koordinaten

- *Homogene Koordinaten* sind bekannt aus der Computergrafik, um Probleme in der Matrixberechnug zu umgehen
- Die Punkte eines n-dimensionalen Raums werden in einem $n+1$ dimensionalen Raum dargestellt
- Aus $p = (x, y, z) \in \mathcal{R}^3$ wird $p' = (hx, hy, hz, h) \in \mathcal{R}^4$, wobei $h \neq 0 \in \mathcal{R}$
  Beispiel:
  $(2, 5, 4) \in \mathcal{R}^3 \longrightarrow .., (1,\ 2.5,\ 2,\ 0.5), .., (2, 5, 4, 1), .., (4, 10, 8, 2), .. \in \mathcal{R}^4$
- In der Robotik ist $h = 1$, was einer direkten Projektion zwischen n- und $(n+1)$-dimensionalem Raum entspricht
- h ist eine Art Skalierung

Homogene Transformationen

$$H = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \textit{Rotation} \\ \textit{Scherung} \\ \textit{lokale Skalierung} \end{array} & \textit{Translation} \\ \hline \textit{Projektion} & \textit{Skalierung} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array}\right]$$

Homogene Transformationen (cont.)

- In der Robotik ist man nur an Rotation und Translation interessiert Daher ergibt sich:

$$H = \left[\begin{array}{c|c} Rotation & Translation \\ - - - - - & - - - - - - \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 & 1 \end{array}\right]$$

- somit aus $\vec{p}$ und R: $H = \begin{bmatrix} & R & & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{4\times 4}$
- `Verkettung` mehrerer H über Matrixmultiplikation
- `nicht kommutativ`, d.h. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Translation

Verschieben um Vektor $[p_x, p_y, p_z]^T$:

$$T_{(p_x,p_y,p_z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a'}^{\mathrm{T}} &= T_{(p_x,p_y,p_z)} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}} \\ &= (a_x + p_x,\ a_y + p_y,\ a_z + p_z,\ 1)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

Rotation um x-Achse

Drehung um die x-Achse um den Winkel ψ:

$$R_{x(\psi)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a'}^{\mathrm{T}} &= R_{x(\psi)} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \cdot \cos(\psi) - a_z \cdot \sin(\psi) \\ a_y \cdot \sin(\psi) + a_z \cdot \cos(\psi) \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

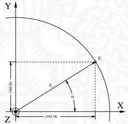
Exkurs: Rotation in der euklidischen Ebene $\mathcal{R}^2$

- Drehung eines Vektors $\vec{p_1}$ in $\mathcal{R}^2$ auf dem Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn um einen festen Ursprung um den Winkel θ.

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \cos(\alpha) \\ y_1 &= \sin(\alpha) \end{aligned} \qquad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{p_2} = R(\vec{p_1}, \theta)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta = x_1 \cos\theta - y_1 sin\theta \\ y_2 &= \sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta = y_1 \cos\theta + x_1 sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$



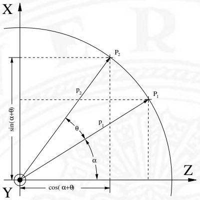
- also:

$$\vec{p_2} = R_{(\theta)} \vec{p_1} \qquad mit \qquad R_{(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotation um y-Achse

Drehung um die y-Achse um den Winkel θ:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} z_2 &= \cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta = z_1 \cos\theta - x_1 sin\theta \\ x_2 &= \sin(\alpha+\theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta = x_1 \cos\theta + z_1 sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos\theta + z_1 sin\theta \\ z_2 &= -x_1 sin\theta + z_1 \cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Rotation um z-Achse

Drehung um die z-Achse um den Winkel ϕ:

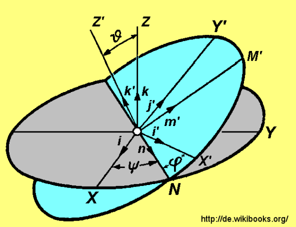
$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Folge von Drehungen

Drehungen beziehen sich auf die neuen, transformierten Achsen: Sequentielle Rechtsmultiplikationen der Transformationsmatrizen nach der Reihenfolge der Drehungen.

Beispiel: Rotation um $Z\,X'\,Z''$:

1. Eine Drehung ψ um die z-Achse $R_{z,\psi}$
2. Eine Drehung θ um die neue x-Achse $R_{x',\theta}$
3. Eine Drehung ϕ um die neue z-Achse $R_{z',\phi}$



Anmerkung:
Die Folge der Drehungen lässt sich auch durch Drehungen um die raumfesten (ungedrehten) Achsen, allerdings in umgekehrter Reihenfolge, verwirklichen: 1. Drehung um die Z-Achse um ϕ, 2. Drehung um die X-Achse um θ und Drehung um die Z-Achse um ψ.

Verknüpfung der Drehmatrizen

$$R_{\psi,\theta,\phi} = R_{z,\psi} R_{x',\theta} R_{z'',\phi}$$

$$= \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

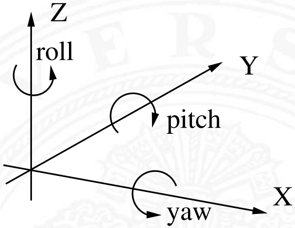
$$= \begin{bmatrix} C\psi C\phi - S\psi C\theta S\phi & -C\psi S\phi - S\psi C\theta C\phi & S\psi S\theta & 0 \\ S\psi C\phi + C\psi C\theta S\phi & -S\psi S\phi + C\psi C\theta C\phi & -C\psi S\theta & 0 \\ S\theta S\phi & S\theta C\phi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$AB \neq BA$$

Folge von Drehungen (cont.)

Drehungen beziehen sich auf die Hauptachsen des Ursprungskoordinatensystems: Sequentielle Linksmultiplikationen der Transformationsmatrizen nach Reihenfolge der Drehungen.



Beispiel: Rotation um $X\ Y\ Z$ (RPY):

1. Eine Drehung ψ um die x-Achse $R_{x,\psi}$ (yaw)
2. Eine Drehung θ um die y-Achse $R_{y,\theta}$ (pitch)
3. Eine Drehung ϕ um die z-Achse $R_{z,\phi}$ (roll)
   ($\vec{a'}^{\mathrm{T}} = R_{z(\phi)} \cdot R_{y(\theta)} \cdot R_{x(\psi)} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}$)

Bezogen auf die jeweils mitrotierten Achsen lässt sich die Folge auch durch sequentielle Rechtsmultiplikationen beschreiben mit:

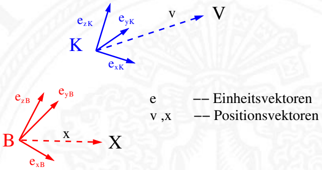
1. Drehung um die z-Achse um ϕ ($R_{z,\phi}$)
2. Drehung um die transformierte y-Achse um θ ($R_{y',\theta}$)
3. Drehung um die abermals transformierte x-Achse um ψ ($R_{x'',\psi}$)
   ($\vec{a'} = \vec{a} \cdot R_{z(\phi)} \cdot R_{y(\theta)} \cdot R_{x(\alpha)}$)

Folge von Drehungen, Rechts- und Linksmultiplikation

$$
\begin{aligned}
{}^{K}R_B \cdot x^{\mathrm{T}} &= v^{\mathrm{T}} \\
R \cdot x^{\mathrm{T}} &= v^{\mathrm{T}} \\
R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot x^{\mathrm{T}} &= v^{\mathrm{T}} \\
R_2 \cdot R_3 \cdot x^{\mathrm{T}} &= R_1^{-1} \cdot v^{\mathrm{T}} \\
R_3 \cdot x^{\mathrm{T}} &= R_2^{-1} \cdot R_1^{-1} \cdot v^{\mathrm{T}} \\
x^{\mathrm{T}} &= R_3^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot R_1^{-1} \cdot v^{\mathrm{T}} \\
x^{\mathrm{T}} &= R_3^{\mathrm{T}} \cdot R_2^{\mathrm{T}} \cdot R_1^{\mathrm{T}} \cdot v^{\mathrm{T}} \\
x &= (R_3^{\mathrm{T}} \cdot R_2^{\mathrm{T}} \cdot R_1^{\mathrm{T}} \cdot v^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\
x &= v \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \\
x &= v \cdot {}^{K}R_B
\end{aligned}
$$

$$mit: {}^{K}R_B = {}^{K}R_{1B} \cdot {}^{K}R_{2B} \cdot {}^{K}R_{3B}$$

$$kurz: {}^{K}R_B = R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$$



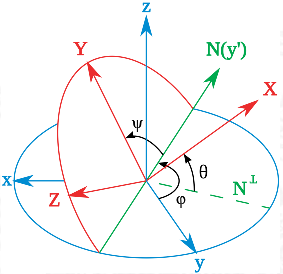
$$mit: (A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$$

(1)

Folge von Drehungen, Beispiel

Rotationsfolge 1 (RPY):

1. Drehung um die x-Achse mit $\psi = 20°$
2. Drehung um die y-Achse mit $\theta = 30°$
3. Drehung um die z-Achse mit $\phi = 50°$



Rotationsfolge 2 (Z Y' X"):

1. Drehung um die z-Achse mit $\phi = 50°$
2. Drehung um die mitgedrehte y-Achse (y') mit $\theta = 30°$
3. Drehung um die erneut mitgedrehte x-Achse (x'') mit $\psi = 20°$

Verknüpfung der Drehmatrizen

$$R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi & 0 \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

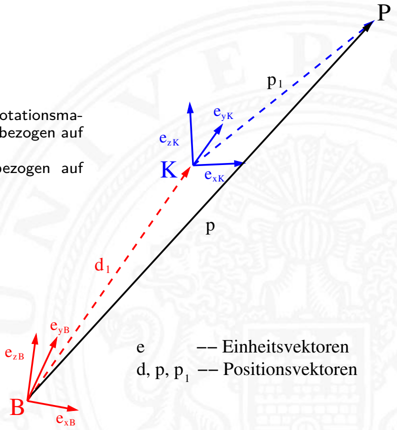
Beispiel: Homogene Koordinaten

Punkte im Raum können beschrieben werden durch:

- Positionsvektoren
- Rotationsmatrix

$$
\begin{aligned}
{}^B p &= {}^B d_1 + {}^B p_1 \\
&= {}^B d_1 + {}^B R_K \; {}^K p_1
\end{aligned}
$$

Hinweis:
${}^B R_K$ bedeutet: Rotationsmatrix für Frame K bezogen auf Frame B.
${}^K p$: Vektor p bezogen auf Frame K.



In homogenen Koordinaten:

$$
{}^B p_H = \begin{bmatrix} {}^B R_K & {}^B d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^K p_1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

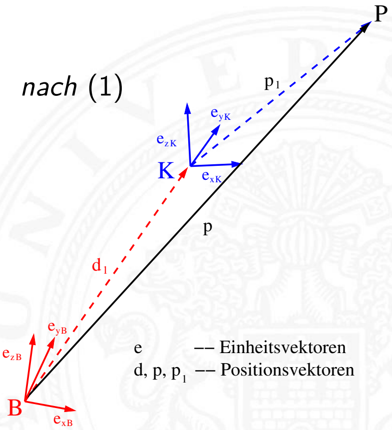
$$
= {}^B H_K \quad {}^K p_H
$$

Beispiel: Homogene Koordinaten (cont.)

${}^{B}R_{K}$ versus ${}^{K}R_{B}$

$$
\begin{aligned}
{}^{B}p_1 &= {}^{K}p_1 \cdot {}^{K}R_B \qquad \textit{nach } (1) \\
{}^{B}R_K \cdot {}^{K}p_1^{\mathrm{T}} &= {}^{B}p_1^{\mathrm{T}} \\
({}^{B}R_K \cdot {}^{K}p_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} &= {}^{K}p_1 \cdot {}^{K}R_B \\
{}^{K}p_1 \cdot {}^{B}R_K^{\mathrm{T}} &= {}^{K}p_1 \cdot {}^{K}R_B
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad {}^{B}R_K^{-1} = {}^{K}R_B
$$

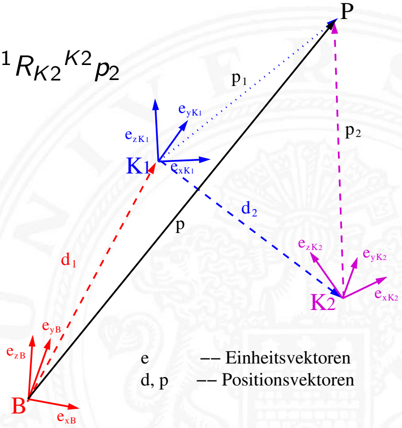


Beispiel: Homogene Koordinaten (cont.)

$$
\begin{aligned}
{}^{B}p &= {}^{B}d_1 + {}^{B}d_2 + {}^{B}p_2 \\
&= {}^{B}d_1 + {}^{B}R_{K1} \cdot {}^{K1}d_2 + {}^{B}R_{K1}\,{}^{K1}R_{K2}\,{}^{K2}p_2
\end{aligned}
$$

In homogenen Koordinaten:

$$
{}^{B}p_H = {}^{B}H_{K1} \quad {}^{K1}H_{K2} \quad {}^{K2}p_{2H}
$$



Koordinaten-Frames

Sie werden über die Elemente der homogenen Transformation als vier Vektoren dargestellt.

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Inverse Transformationen

Die Inverse einer Drehmatrix ist einfach ihre Transponierte:

$$R^{-1} = R^T \text{ und } RR^T = I$$

wobei I die Identitätsmatrix ist.

Die Inverse von (1) ist:

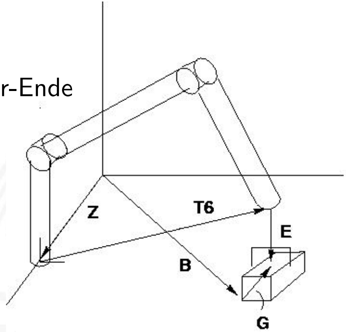
$$H^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & -\mathbf{p}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}_1 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & -\mathbf{p}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}_2 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & -\mathbf{p}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ und $\mathbf{p}$ die vier Spaltenvektoren von (1) sind und $\cdot$ das Skalarprodukt von Vektoren darstellt.

Relativtransformationen

Man hat die folgenden Transformationen:

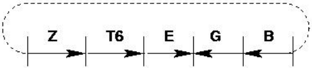
- Z: Welt $\rightarrow$ Manipulator-Basis
- T_6: Manipulator-Basis $\rightarrow$ Manipulator-Ende
- E: Manipulator-Ende $\rightarrow$ Endeffektor
- B: Welt $\rightarrow$ Objekt
- G: Objekt $\rightarrow$ Endeffektor

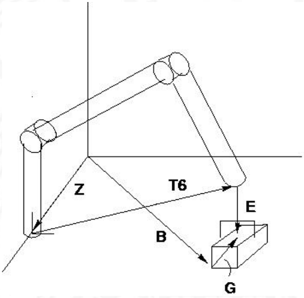


Gleichung der Transformation

Es gibt zwei Beschreibungen der Position des Endeffektors, eine in Bezug auf das Objekt und die andere auf den Manipulator. Sie beschreiben die gleiche Sache:

$$ZT_6E = BG$$





Um die Manipulator-Transformation zu finden:

$$T_6 = Z^{-1}BGE^{-1}$$

Um die Position des Objekts zu bestimmen:

$$B = ZT_6EG^{-1}$$

Dies wird auch als kinematische Kette bezeichnet.

Zusammenfassung der homogenen Transformationen

- `Eine homogene Transformation` beschreibt die Position und Orientierung eines Koordinaten-Frames im Raum.
- `Wenn der Koordinaten-Frame` bezüglich eines Festkörpers definiert wird, ist die Position und Orientierung des Festkörpers auch eindeutig spezifiziert.
- `Eine homogene Transformation` kann in eine Rotation und in eine Translation zerlegt werden.

Zusammenfassung der homogenen Transformationen

- `Mehrere Translationen` und Rotationen können zusammengefasst werden. Es gilt:
  - Wenn die Rotationen / Translationen bezüglich des aktuellen neu definierten (oder veränderten) Koordinatensystems durchgeführt werden, müssen die entsprechenden neu hinzukommenden Transformationsmatrizen über eine Rechtsmultiplikation verknüpft werden.
  - Wenn sie alle bezüglich des festen Referenz-Koordinatensystems durchgeführt werden, müssen die zusätzlichen Transformationsmatrizen durch eine Linksmultiplikation verknüpft werden.

Agenda

2. Grundlagen der Robotik

- Grundbegriffe
- Roboterklassifikation
- Koordinatensysteme
- Homogene Transformationen
- Verknüpfung der Drehmatrizen
- Koordinaten-Frames
- Zusammenfassung der homogenen Transformationen
- Roboterkinematik

Roboterkinematik

Unter Kinematik eines Roboters versteht man die Transformationsvorschrift, die den Zusammenhang zwischen den Gelenkkoordinaten eines Roboters **q** und den Umweltkoordinaten des Endeffektors **x** beschreibt. Sie wird nur durch die Geometrie des Roboters bestimmt.

- Basisframe
- Bezug konsekutiver Frames zueinander
  $\Longrightarrow$ Bildung einer rekursiven Kette
- Gelenkkoordinate:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & : \textit{Gelenk } i \textit{ rotatorisch} \\ d_i & : \textit{Gelenk } i \textit{ translatorisch} \end{cases}$$

- Ziel: absolute Bestimmung der Position des Endeffektors (Tool Center Point, TCP) im kartesischen Koordinatensystem

Kinematik-Gleichungen

- Manipulator: eine Reihe von Gliedern über Gelenke verbundenen
- jedem Glied einen eigenen Koordinaten-Frame
- Homogene Matrix A beschreibt relative Translation und Rotation zwischen zwei aufeinander folgenden Gelenken (Gelenkübergang).
- Beispiel: Manipulator mit n Gelenken:

$^0A_1$: Position und Orientierung des ersten Gliedes
$^1A_2$: Position und Orientierung des 2. Gliedes bezüglich Glied 1
$^2A_3$: Position und Orientierung des 3. Gliedes bezüglich Glied 2
$\vdots$
$^{n-1}A_n$: Position und Orientierung Glied n bezüglich Glied (n-1);

Das folgende Produkt wird definiert als:

$$T_6 = {}^0A_1\, {}^1A_2\, \dots\, {}^{n-2}A_{n-1}\, {}^{n-1}A_n$$

Festlegung der Gelenkkoordinatensysteme

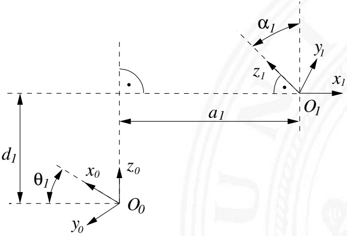
- Ziel: Berechnung von $T6 = \prod_{i=1}^{n} A_i$
  - $T6$ definiert, wie die n Gelenkübergänge zusammenzufassen sind, um 6 kartesische Freiheitsgrade zu beschreiben.
- Festlegung eines Koordinatensystems pro Segment $i = 1..n$
  - Zuordnung KS zu Gelenk grundsätzlich beliebig
- Ermittlung der Transformation A_i pro Segment $i = 1..n$
  - unterschiedliche Parametersätze und Transformationsabfolgen möglich
- allgemein anerkanntes Schema:
  Denavit-Hartenberg (D-H) Konvention

Denavit Hartenberg Konvention

- Idee: Bestimmung der Transformationsmatrix A_i mittels vier Gelenkparameter $(\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i)$ und zwei Vorbedingungen:

  DH1: die Achse x_i verläuft senkrecht zur Achse z_{i-1}

  DH2: die Achse x_i schneidet die Achse z_{i-1}

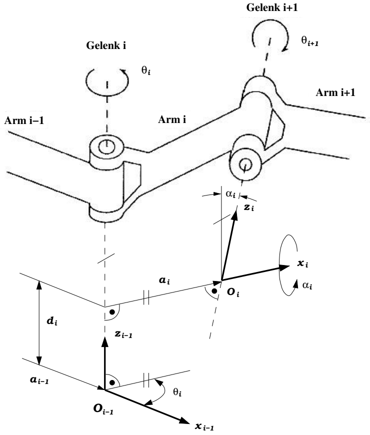


- Ermittlung der 4 Parameter pro Segment $i = 1..n$

Parameter zur Beschreibung der Gelenke

Zwei Parameter zur Beschreibung der Struktur des Gelenkes i:

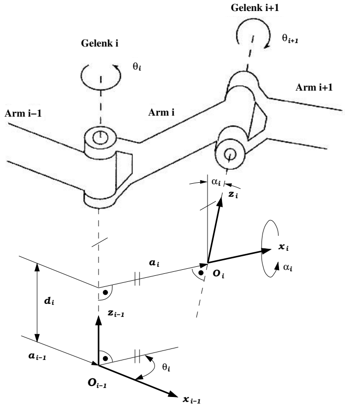
- a_i: die kürzeste Entfernung zwischen der z_{i-1}-Achse und der z_i-Achse
- α_i: der Drehwinkel um die x_i-Achse, der die z_{i-1}-Achse auf die z_i-Achse ausrichtet



Parameter zur Beschreibung der Gelenke (cont.)

Zwei Parameter zur Bestimmung der relativen Distanz und Winkel der benachbarten Gelenke:

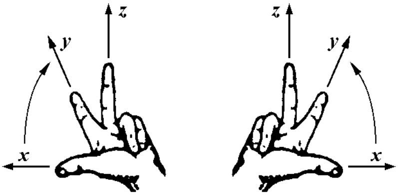
- d_i: Entfernung Ursprung O_{i-1} des (i-1)-ten KS zu Schnittpunkt der z_{i-1}-Achse mit der x_i-Achse.
- θ_i: der Gelenkwinkel um die z_{i-1}-Achse von der x_{i-1}-Achse zur Projektion der x_i-Achse in die x_{i-1}, y_{i-1}-Ebene.



Festlegung der Koordinatensysteme

Für die Festlegung des Koordinatensystems gilt:

- Die z_i-Achse wird entlang der Bewegungsachse des (i+1)-ten Gelenks gelegt.
- Die x_i-Achse ist senkrecht zur z_{i-1}-Achse, schneidet diese und zeigt von ihr weg.
- Die y_i-Achse wird so festgelegt, dass ein rechtshändiges Koordinatensystem entsteht.

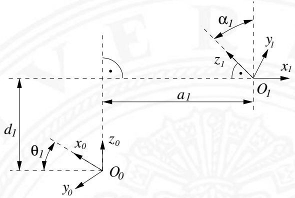


Linkshändiges Koordinatensystem Rechtshändiges Koordinatensystem
www.wikepedia.org

Einige Sonderfälle

Achtung: Die Denavit-Hartenberg Notation ist nicht eindeutig!

- z_{i-1} liegt parallel zu z_i
  - beliebig viele kürzeste Normale
  - meist Wahl, dass d_i=0
- z_{i-1} und z_i schneiden sich
  - meist Wahl, dass KS_i im Schnittpunkt liegt, dann a_i = 0



- Lage von KS_n nicht eindeutig, da kein Gelenk $n+1$ existiert; x_n muss aber trotzdem auf einer Normalen zu z_{n-1} liegen; übliche Wahl: z_n zeigt “aus Hand heraus“

Vorgehen bei gegebener Struktur

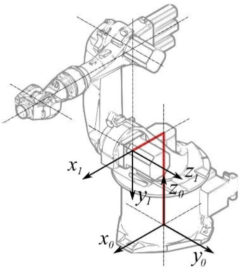
- Ausgangspunkt: Das Koordinatensystem Σ_0 ist das ortsfeste Ausgangskoordinatensystem in der Basis des Manipulators
- Achsen bestimmen und von 1 bis n durchnumerieren
- KS_{i-1} auf Dreh- bzw. Schubachse i positionieren, z_{i-1} zeigt in Achsrichtung i
- Normale zw. den Achsen bestimmen; x_i festlegen (in Richtung der Normalen)
- y_i bestimmen (Rechtssystem)
- Denavit-Hartenberg Parameter ablesen
- Gesamttransformation berechnen

DV-Transformation zwischen zwei Gelenken

Beispiel: Überführung eines Koordinatensystems T_0 in ein Koordinatensystem T_1

- Gelenkwinkel: Rotation θ_1 um die z_0-Achse, damit die x_0-Achse parallel zu der x_1-Achse liegt

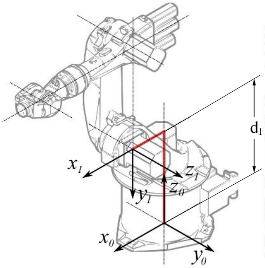
$$R_z(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DV-Transformation zwischen zwei Gelenken (cont.)

- Gelenkabstand: Translation d_1 entlang der z_0-Achse bis zu dem Punkt, wo sich z_0 und x_1 schneiden

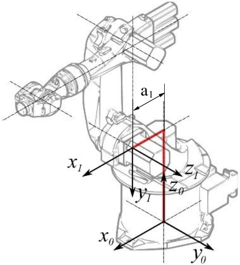
$$T(0,0,d_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DV-Transformation zwischen zwei Gelenken (cont.)

- Armlänge: Translation a_1 entlang der x_1-Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen

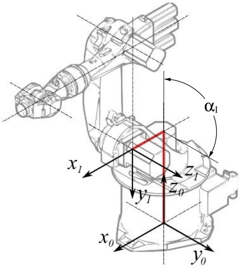
$$T(a_1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DV-Transformation zwischen zwei Gelenken (cont.)

- Verwindung: Rotation α_1 um die x_1-Achse, um die z_0-Achse in die z_1-Achse zu überführen

$$R_{x(\alpha_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DV-Transformation zwischen zwei Gelenken (cont.)

- Gesamttransformation von T_0 nach T_1:

$$^1T_0 = R_z(\theta_1) \cdot T(0,0,d_1) \cdot T(a_1,0,0) \cdot R_x(\alpha_1)$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 cos\alpha_1 & sin\theta_1 sin\alpha_1 & a_1 cos\theta_1 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 cos\alpha_1 & -cos\theta_1 sin\alpha_1 & a_1 sin\theta_1 \\ 0 & sin\alpha_1 & cos\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Denavit-Hartenberg-Parameter: θ_n, d_n, a_n, α_n
  - a_n, α_n – konstant, konstruktionsbedingt
  - θ_n, d_n – variabel
    - Rotationsgelenk: θ_n variabel, d_n fix
    - Translationsgelenk, d_n variabel, θ_n fix

Position

$T6$ definiert, z. B. bei einem Manipulator mit ausschließlich Rotationsgelenken, wie die n Gelenkwinkel zu 12 nichtlinearen Formeln zusammenzufassen sind, um 6 kartesische Freiheitsgrade zu beschreiben.

- `Vorwärtskinematik` K definiert als:
  - $K : \vec{\theta} \in \mathcal{R}^n \rightarrow \vec{x} \in \mathcal{R}^6$
  - Gelenkwinkel $\rightarrow$ Position $+$ Orientierung
- `Inverse Kinematik` K^{-1} definiert als:
  - $K^{-1} : \vec{x} \in \mathcal{R}^6 \rightarrow \vec{\theta} \in \mathcal{R}^n$
  - Position $+$ Orientierung $\rightarrow$ Gelenkwinkel
  - nichttrivial, weil K i.A. nicht eindeutig invertierbar

Bahnplanung

Da $T6$ nur die Ziel**position** beschreibt, ist explizite Generierung einer Trajektorie nötig, je nach *constraints* unterschiedlich für:

- Gelenkwinkelraum
- kartesischen Raum

Interpolation durch:

- stückweise Geraden
- stückweise Polynome
- B-Splines
- ...

Diese Aspekte werden wegen der beschränkten Zeit nicht weiter vertieft. Siehe hierzu relevante Veranstaltungen unter: http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/lectures/