64-040 Modul IP7: Rechnerstrukturen

http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2011ws/vorlesung/rs

Kapitel 6

Andreas Mäder

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2011/2012

Kapitel 6

Rechner-Arithmetik

- Wiederholung: Stellenwertsystem
- Addition: Ganzzahlen, Zweierkomplementzahlen
- Überlauf

- Multiplikation
- Division

- Schiebe-Operationen

Wiederholung: Stellenwertsystem

- Wahl einer geeigneten Zahlenbasis b („Radix“)
  - 10: Dezimalsystem
  - 2: Dualsystem
- Menge der entsprechenden Ziffern $\{0, 1, \ldots, b-1\}$
- inklusive einer besonderen Ziffer für den Wert Null
- Auswahl der benötigten Anzahl n von Stellen

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

- b: Basis, a_i Koeffizient an Stelle i
- universell verwendbar, für beliebig große Zahlen

Integer-Datentypen in C und Java

C:

- Zahlenbereiche definiert in Headerdatei
  `/usr/include/limits.h`
  `LONG_MIN`, `LONG_MAX`, `ULONG_MAX`, etc.
- Zweierkomplement (signed), Ganzzahl (unsigned)
- die Werte sind plattformabhängig (!)

Java:

- 16-bit, 32-bit, 64-bit Zweierkomplementzahlen
- Wrapper-Klassen `Short`, `Integer`, `Long`

```
Short.MAX_VALUE    =          32767
Integer.MIN_VALUE  =  -2147483648
Integer.MAX_VALUE  =   2147483647
Long.MIN_VALUE     =  -9223372036854775808L
```

  etc.
- Werte sind für die Sprache fest definiert

Addition im Dualsystem

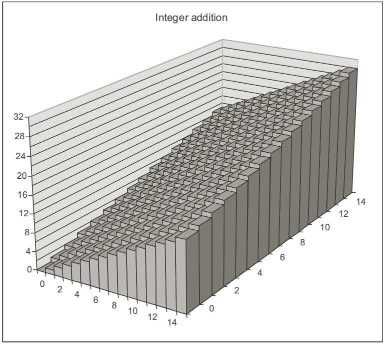
- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- Addition mehrstelliger Zahlen erfolgt stellenweise
- Additionsmatrix:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

- Beispiel

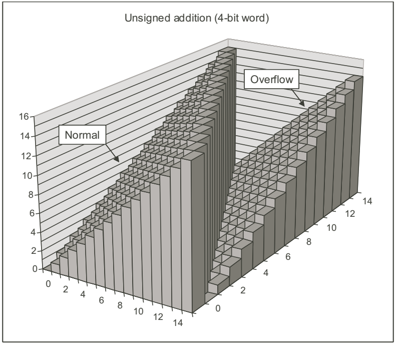
$$
\begin{array}{lr}
 & 1011\,0011 \\
+ & 0011\,1001 \\
\hline
\text{Ü} & 11\quad 11\;\;\, \\
\hline\hline
 & 1110\,1100
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
= & 179 \\
= & 57 \\
\hline
 & 11\; \\
\hline\hline
= & 236
\end{array}
$$

Visualisierung: 4-bit Addition



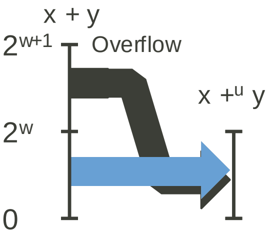
- Wortbreite w, hier 4-bit
- Zahlenbereich der Operanden x, y ist 0 .. $(2^w - 1)$
- Zahlenbereich des Resultats s ist 0 .. $(2^{w+1} - 2)$

Visualisierung: 4-bit unsigned Addition



- Operanden und Resultat jeweils 4-bit
- Überlauf, sobald das Resultat größer als $(2^w - 1)$
- oberstes Bit geht verloren

Überlauf: unsigned Addition



- Wortbreite w, hier 4-bit
- Zahlenbereich der Operanden x, y ist 0 .. $(2^w - 1)$
- Zahlenbereich des Resultats s ist 0 .. $(2^{w+1} - 2)$
- Werte $s \geq 2^w$ werden in den Bereich 0 .. $2^w - 1$ abgebildet

Subtraktion im Dualsystem

- Subtraktion mehrstelliger Zahlen erfolgt stellenweise
- (Minuend - Subtrahend), Überträge berücksichtigen

- Beispiel

$$\begin{array}{rr} & 1011\,0011 \\ - & 0011\,1001 \\ \hline \text{Ü} & 1111 \\ \hline & 111\,1010 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} = & 179 \\ = & 57 \\ \hline & \\ \hline = & 122 \end{array}$$

- Alternative: Ersetzen der Subtraktion durch Addition des *b*-Komplements

Subtraktion mit *b*-Komplement

- bei Rechnung mit fester Stellenzahl n gilt:

$$K_b(z) + z = b^n \quad = 0$$

  weil b^n gerade nicht mehr in n Stellen hineinpasst (!)

- also gilt für die Subtraktion auch:

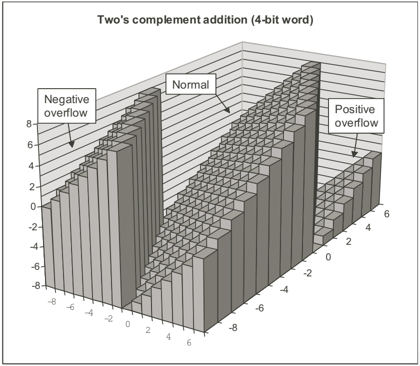
$$x - y = x + K_b(y)$$

$\Rightarrow$ Subtraktion kann also durch Addition des b-Komplements ersetzt werden

- und für Integerzahlen gilt außerdem

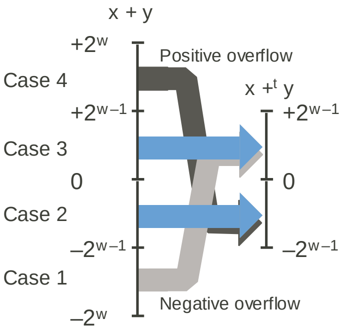
$$x - y = x + K_{b-1}(y) + 1$$

Visualisierung: 4-bit signed Addition (Zweierkomplement)



- Zahlenbereich der Operanden: -2^{w-1} .. $(2^{w-1}-1)$
- Zahlenbereich des Resultats: -2^{w} .. $(2^{w}-2)$
- Überlauf in beide Richtungen möglich

Überlauf: signed Addition



- Zahlenbereich der Operanden: -2^{w-1} .. $(2^{w-1} - 1)$
- Zahlenbereich des Resultats: -2^{w} .. $(2^{w} - 2)$
- Überlauf in beide Richtungen möglich

Überlauf: Erkennung

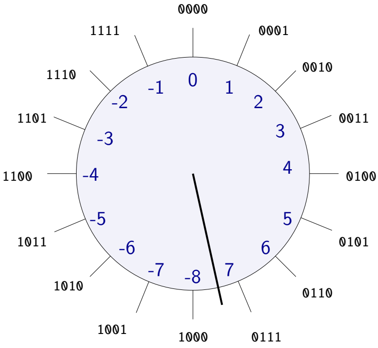
- Erkennung eines Überlaufs bei der Addition?
- wenn beide Operanden das gleiche Vorzeichen haben
- und Vorzeichen des Resultats sich unterscheidet

- Java-Codebeispiel

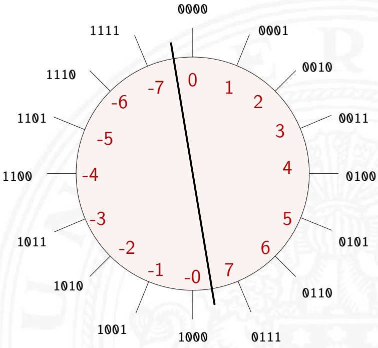
```
int a, b, sum;          // operands and sum
boolean ovf;            // ovf flag indicates overflow

sum = a + b;
ovf = ((a < 0) == (b < 0)) && ((a < 0) != (sum < 0));
```

Veranschaulichung: Zahlenkreis

Beispiel für w-bit

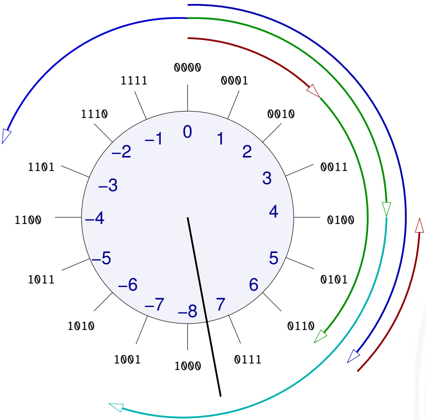


Zweierkomplement



Betrag und Vorzeichen

Zahlenkreis: Addition, Subtraktion



0010
0100
0101
0110

0010+0100=0110, 0100+0101=1001, 0110–0010=0100

Unsigned-Zahlen in C

- für hardwarenahe Programme und Treiber
- für modulare Arithmetik („multi-precision arithmetic“)
- aber evtl. ineffizient (vom Compiler schlecht unterstützt)

- Vorsicht vor solchen Fehlern

```c
unsigned int i, cnt = ...;
for( i = cnt-2; i >= 0; i-- ) {
  a[i] += a[i+1];
}
```

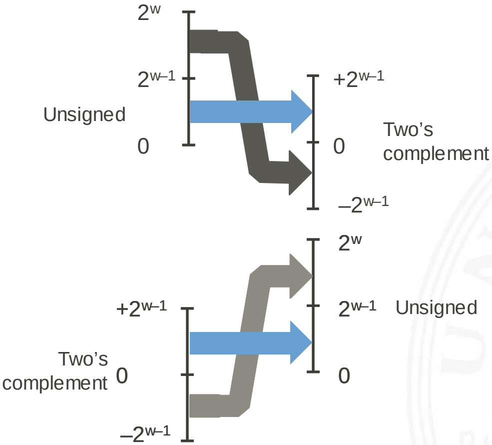
Unsigned-Typen in C: Casting-Regeln

- Bit-Repräsentation wird nicht verändert
- kein Effekt auf positiven Zahlen
- Negative Werte als (große) positive Werte interpretiert

```
short int          x =  15213;
unsigned short int ux = (unsigned short) x; // 15213

short int          y = -15213;
unsigned short int uy = (unsigned short) y; // 50323
```

- Schreibweise für Konstanten:
  - ohne weitere Angabe: signed
  - Suffix „U“ für unsigned: `0U`, `4294967259U`

Interpretation: unsigned/signed



Typumwandlung in C: Vorsicht

- Arithmetische Ausdrücke:
  - bei gemischten Operanden: Auswertung als unsigned
  - auch für die Vergleichsoperationen <, >, ==, <=, >=
  - Beispiele für Wortbreite 32-bit:

Konstante 1	Relation	Konstante 2	Auswertung	Resultat
`0`	`==`	`0U`	unsigned	1
`-1`	`<`	`0`	signed	1
`-1`	`<`	`0U`	unsigned	0
`2147483647`	`>`	`-2147483648`	signed	1
`2147483647U`	`>`	`-2147483648`	unsigned	0
`2147483647`	`>`	`(int) 2147483648U`	signed	1
`-1`	`>`	`-2`	signed	1
`(unsigned) -1`	`>`	`-2`	unsigned	1

Fehler

Sign-Extension

- Gegeben: w-bit Integer x
- Umwandeln in $w + k$-bit Integer x' mit gleichem Wert?

- **Sign-Extension**: Vorzeichenbit kopieren

$$x' = x_{w-1}, \dots x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \dots x_0$$

0110	4-bit signed:	+6
0000 0110	8-bit signed:	+6
0000 0000 0000 0110	16-bit signed:	+6
1110	4-bit signed:	-2
1111 1110	8-bit signed:	-2
1111 1111 1111 1110	16-bit signed:	-2

Java Puzzlers No.5

J. Bloch, N. Gafter: *Java Puzzlers: Traps, Pitfalls, and Corner Cases*, Addison-Wesley 2005

```
public static void main( String[] args ) {
   System.out.println(
     Long.toHexString( 0x100000000L + 0xcafebabe ));
}
```

- Programm addiert zwei Konstanten, Ausgabe in Hex-Format
- Was ist das Resultat der Rechnung?

0xffffffffcafebabe	(sign-extension!)
0x0000000100000000	
Ü 11111110	
00000000cafebabe	

Ariane-5 Absturz

Ariane-5 Absturz

- Erstflug der Ariane-5 („V88“) am 04. Juni 1996
- Kurskorrektur wegen vermeintlich falscher Fluglage
- Selbstzerstörung der Rakete nach 36.7 Sekunden
- Schaden ca. 370 M$ (teuerster Softwarefehler der Geschichte?)

- bewährte Software von Ariane-4 übernommen
- aber Ariane-5 viel schneller als Ariane-4
- 64-bit Gleitkommawert für horizontale Geschwindigkeit
- Umwandlung in 16-bit Integer: dabei Überlauf

- `http://de.wikipedia.org/wiki/Ariane_V88`

Multiplikation im Dualsystem

- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- $p = a \cdot b$ mit Multiplikator a und Multiplikand b
- Multiplikation von a mit je einer Stelle des Multiplikanten b
- Addition der Teilterme

- Multiplikationsmatrix ist sehr einfach:

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Multiplikation im Dualsystem (cont.)

- Beispiel

$$
\begin{array}{rrcll}
 & 10110011 \quad \times & 1101 & = 179 \cdot 13 & = 2327 \\
\hline
 & 10110011 \quad & 1 & & = 1001\,0001\,0111 \\
 & 10110011 \quad & 1 & & = 0x917 \\
 & 00000000 \quad & 0 & & \\
 & 10110011 \quad & 1 & & \\
\hline
\text{Ü} & 11101111 & & & \\
\hline\hline
 & 100100010111 & & &
\end{array}
$$

Multiplikation: Wertebereich unsigned

- bei Wortbreite w bit
- Zahlenbereich der Operanden: $0 \,..\, (2^w - 1)$
- Zahlenbereich des Resultats: $0 \,..\, (2^w - 1)^2 = 2^{2w} - 2^{w+1} + 1$
- bis zu $2w$ bits erforderlich

- C: Resultat enthält nur die unteren w bits
- Java: keine unsigned Integer
- Hardware: teilweise zwei Register *high*, *low* für die oberen und unteren Bits des Resultats

Multiplikation: Zweierkomplement

- Zahlenbereich der Operanden: $-2^{w-1} \,..\, (2^{w-1} - 1)$
- Zahlenbereich des Resultats: $-2^{w} \cdot (2^{w-1} - 1) \,..\, (2^{2w-2})$
- bis zu $2w$ bits erforderlich

- C, Java: Resultat enthält nur die unteren w bits
- Überlauf wird ignoriert

```
int i = 100*200*300*400; // -1894967296
```

- Wichtig: Bit-Repräsentation der unteren Bits des Resultats entspricht der unsigned Multiplikation
- kein separater Algorithmus erforderlich
- Beweis: siehe Bryant/O'Hallaron, 2.3.5

Java Puzzlers No. 3

J. Bloch, N. Gafter: *Java Puzzlers: Traps, Pitfalls, and Corner Cases*, Addison-Wesley 2005

```
public static void main( String args[] ) {
  final long MICROS_PER_DAY = 24 * 60 * 60 * 1000 * 1000;
  final long MILLIS_PER_DAY = 24 * 60 * 60 * 1000;
  System.out.println(  MICROS_PER_DAY / MILLIS_PER_DAY );
}
```

- druckt den Wert 5, nicht 1000...
- `MICROS_PER_DAY` mit 32-bit berechnet, dabei Überlauf
- Konvertierung nach 64-bit `long` erst bei Zuweisung
- `long`-Konstante schreiben: `24L * 60 * 60 * 1000 * 1000`

Division: Dualsystem

- $d = a/b$ mit Dividend a und Divisor b

- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- schrittweise Subtraktion des Divisors
- Berücksichtigen des „Stellenversetzens“

- in vielen Prozessoren nicht (oder nur teilweise) durch Hardware unterstützt
- daher deutlich langsamer als Multiplikation

Division: Beispiel im Dualsystem

$$100_{10}/3_{10} = 110\,0100_2/11_2 = 10\,0001_2$$

$$
\begin{array}{llll}
1100100 \;\;/\;\; 11 & = 0100001 & & \\
1 & 0 & & \\
11 & 1 & & \\
-11 & & & \\
\hline
0 & 0 & & \\
0 & 0 & & \\
1 & 0 & & \\
10 & 0 & & \\
100 & 1 & & \\
-11 & & & \\
\hline
1 & 1 & \text{(Rest)} &
\end{array}
$$

Division: Beispiel im Dualsystem (cont.)

$91_{10}/13_{10} = 101\,1011_2/1101_2 = 111_2$

$$
\begin{array}{lr}
1011011 \;/\; 1101 = & 0111 \\
1011 & 0 \\
10110 & 1 \\
-1101 & \\
\hline
\;\;10011 & 1 \\
\;\;-1101 & \\
\hline
\;\;\;\;01101 & 1 \\
\;\;\;\;-1101 & \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 &
\end{array}
$$

Höhere mathematische Funktionen

Berechnung von $\sqrt{x}$, $\log x$, $\exp x$, $\sin x$, $\ldots$?

- Approximation über Polynom (Taylor-Reihe) bzw. Approximation über rationale Funktionen
  - vorberechnete Koeffizienten für höchste Genauigkeit
  - Ausnutzen mathematischer Identitäten für Skalierung
- Sukzessive Approximation über iterative Berechnungen
  - Beispiele: Quadratwurzel und Reziprok-Berechnung
  - häufig schnelle (quadratische) Konvergenz
- Berechnungen erfordern nur die Grundrechenarten

Reziprokwert: Iterative Berechnung von $1/x$

- Berechnung des Reziprokwerts $y = 1/x$ über

$$y_{i+1} = y_i \cdot (2 - x \cdot y_i)$$

- geeigneter Startwert y_0 als Schätzung erforderlich

- Beispiel $x = 3,\ y_0 = 0.5$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0.5 \cdot (2 - 3 \cdot 0.5) &&= 0.25 \\
y_2 &= 0.25 \cdot (2 - 3 \cdot 0.25) &&= 0.3125 \\
y_3 &= 0.3125 \cdot (2 - 3 \cdot 0.3125) &&= 0.33203125 \\
y_4 &= 0.3332824 \\
y_5 &= 0.3333333332557231 \\
y_6 &= 0.3333333333333333
\end{aligned}$$

Quadratwurzel: Heron-Verfahren für $\sqrt{x}$

Babylonisches Wurzelziehen

- Sukzessive Approximation von $y = \sqrt{x}$ gemäß

$$y_{n+1} = \frac{y_n + x/y_n}{2}$$

- quadratische Konvergenz in der Nähe der Lösung
- Anzahl der gültigen Stellen verdoppelt sich mit jedem Schritt

- aber langsame Konvergenz fernab der Lösung
- Lookup-Tabelle und Tricks für brauchbare Startwerte y_0

Informationstreue

Welche mathematischen Eigenschaften gelten bei der Informationsverarbeitung, in der gewählten Repräsentation?

Beispiele:

- Gilt $x^2 \geq 0$?
  - float: ja
  - signed integer: nein
- Gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$?
  - integer: ja
  - float: nein

  1.0E20 + (-1.0E20 + 3.14) = 0

Eigenschaften: Rechnerarithmetik

- Addition ist kommutative Gruppe / Abel'sche Gruppe
  - Gruppe: Abgeschlossenheit, Assoziativgesetz, neutrales Element, Inverses
  - Kommutativgesetz
- Multiplikation
  - Abgeschlossenheit: $0 \leq \mathrm{UMult}_v(u, v) \leq 2^{w-1}$
  - Mult. ist kommutativ: $\mathrm{UMult}_v(u, v) = \mathrm{UMult}_v(v, u)$
  - Mult. ist assoziativ:
    $\mathrm{UMult}_v(t, \mathrm{UMult}_v(u, v)) = \mathrm{UMult}_v(\mathrm{UMult}_v(t, u), v)$
  - Eins ist neutrales Element: $\mathrm{UMult}_v(u, 1) = u$
  - Distributivgesetz:
    $\mathrm{UMult}_v(t,\ \mathrm{UAdd}_v(u, v)) = \mathrm{UAdd}_v(\mathrm{UMult}_v(t, u), \mathrm{UMult}_v(t, v))$

Eigenschaften: Rechnerarithmetik (cont.)

Isomorphe Algebren

- Unsigned Addition und Multiplikation (Wortbreite w Bits)
- Zweierkomplement-Addition und Multiplikation (w Bits)
- Isomorph zum Ring der ganzen Zahlen modulo 2^w

- Ring der ganzen Zahlen: Ordnungsrelationen
  - $u > 0 \longrightarrow u + v > v$
  - $u > 0, v > 0 \longrightarrow u \cdot v > 0$
  - diese Relationen gelten nicht bei Rechnerarithmetik (Überlauf)

Eigenschaften: Gleitkomma-Addition

verglichen mit Abel'scher Gruppe

- Abgeschlossen (Addition)? — Ja
- Kommutativ? — Ja
- Assoziativ? — Nein
  (Überlauf, Rundungsfehler)
- Null ist neutrales Element? — Ja
- Inverses Element existiert? — Fast
  (außer für NaN und Infinity)

- Monotonie? $(a \geq b) \longrightarrow (a + c) \geq (b + c)$? — Fast
  (außer für NaN und Infinity)

Eigenschaften: Gleitkomma-Multiplikation

verglichen mit kommutativem Ring

- Abgeschlossen (Multiplikation)? — Ja
  (aber Infinity oder NaN möglich)
- Kommutativ? — Ja
- Assozativ? — Nein
  (Überlauf, Rundungsfehler)
- Eins ist neutrales Element? — Ja
- Distributivgesetz? — Nein

- Monotonie? $(a \geq b) \& (c \geq 0) \longrightarrow (a \cdot c) \geq (b \cdot c)$? — Fast
  (außer für NaN und Infinity)