

## Einführung in die Robotik

**Jianwei Zhang**  
zhang@informatik.uni-hamburg.de

**T | A**  
**M | S**  
Universität Hamburg  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Department Informatik  
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

17. Mai 2011

## Gliederung

Allgemeine Informationen  
Einführung  
Koordinaten eines Manipulators  
Kinematik-Gleichungen  
Inverse Kinematik von Manipulatoren  
Differentielle Bewegungen mit homogenen Transformationen  
Jacobi-Matrix eines Manipulators  
Aufgabenbeschreibung  
Robotergrammierung auf drei Ebenen  
Trajektorienengineering  
**Trajektorienengineering**  
Interpolationsverfahren  
Bernstein-Polynome

## Gliederung (cont.)

### B-Splines

Einführung in RCCL  
Dynamik  
Roboterregelung  
Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung  
Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung  
Programmierung auf Aufgabenebene und Bahnplanung  
Architekturen sensorbasierter intelligenter Systeme  
Aus- und Rückblick

## Interpolation vs. Approximation

### Approximation:

Annäherung von Daten bzw. Kurven durch andere Kurven. Ein Beispiel ist die Interpolation.

siehe eine Demo:

[http://www.oslo.sintef.no/NAM/people/xic/spline\\_demo/](http://www.oslo.sintef.no/NAM/people/xic/spline_demo/)

Wenn eine Kurve exakt durch alle Daten durchläuft → Interpolation

Man approximiert wenn sehr viele Meßdaten vorliegen.

## Interpolationsverfahren

Generierung von Robotertrajektorien im Gelenkwinkelraum über mehrere Zwischenziele benötigt geeignete Interpolationsverfahren.  
Einige Interpolationsverfahren mit Polynomen:

- ▶ Lagrange-Polynome (s. ein Beispiel unter <http://www.math.ucla.edu/~baker/java/hoefler/TwoDemos.htm>),
- ▶ Newton-Polynome,
- ▶ Bernstein-Polynome,
- ▶ Basis-Splines (s. ein das gleiche Beispiel unter <http://www.math.ucla.edu/~baker/java/hoefler/TwoDemos.htm>).

## Bernstein-Polynome: I

Definition:

Die Bernstein-Polynome der Ordnung  $k + 1$  werden wie folgt definiert:

$$B_{i,k}(t) = \binom{k}{i} (1-t)^{k-i} t^i, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

Interpolation mit  $B_{i,k}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}_0 B_{0,k}(t) + \mathbf{b}_1 B_{1,k}(t) + \dots + \mathbf{b}_k B_{k,k}(t)$$

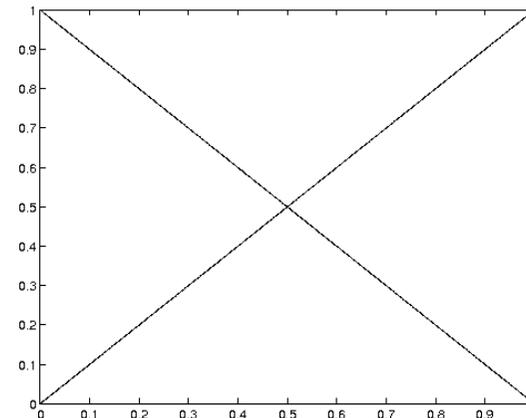
## Bernstein-Polynome: I

Die Eigenschaften der Bernstein-Polynome:

- ▶ "partition of unity":  $\sum_{i=0}^k B_{i,k}(t) \equiv 1$ ,
- ▶ "positivity":  $B_{i,k}(t) \geq 0$  für  $t \in [0, 1]$ ,
- ▶ "recursion":  $B_{i,k}(t) = (1-t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)$ .

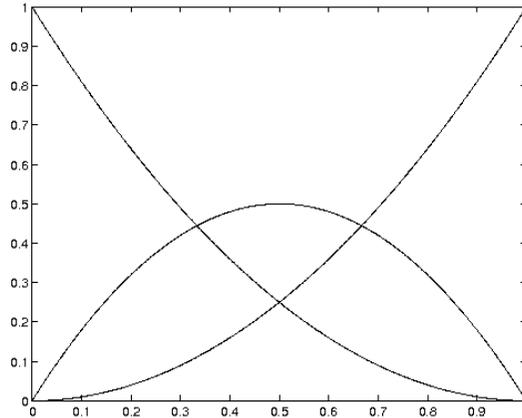
## Bernstein-Polynome: II

Ordnung 2:



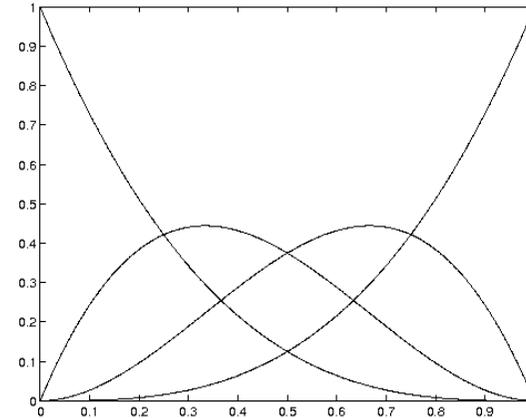
## Bernstein-Polynome: II

Ordnung 3:



## Bernstein-Polynome: II

Ordnung 4:



## B-Spline-Kurve und -Basisfunktionen

Eine **B-Spline-Kurve** der Ordnung  $k$  ist ein stückweise aus **B-Splines (Basisfunktion)** zusammengesetztes Polynom vom Grad  $(k - 1)$ , das an den Segmentübergängen im allgemeinen  $C^{k-2}$  stetig differenzierbar ist.

Dabei seien B-Splines Stückweise Polynome, denen die folgenden geordneten Parameterwerte zugrundeliegen:

wobei  $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+k})$ ,

- ▶  $m$ : wird von der Anzahl der zu interpolierenden Punkte bestimmt
- ▶  $k$ : die festgelegte Ordnung der B-Spline-Kurve

## Definition der B-Splines

Als normalisierte B-Splines  $N_{i,k}$  der Ordnung  $k$  (vom Grad  $k - 1$ ) werden folgende Funktionen bezeichnet:

Für  $k = 1$ ,

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & : \text{für } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

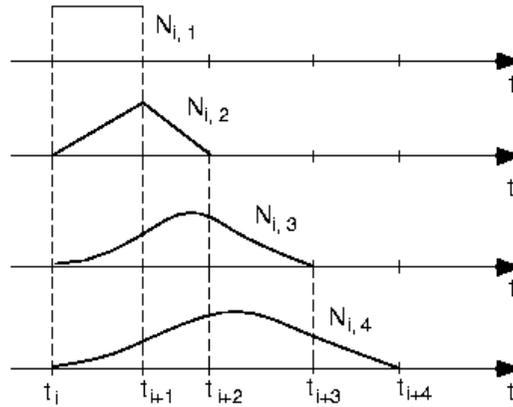
sowie für  $k > 1$ , eine rekursive Darstellung:

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

mit  $i = 0, \dots, m$ .

## Beispiele von B-Splines

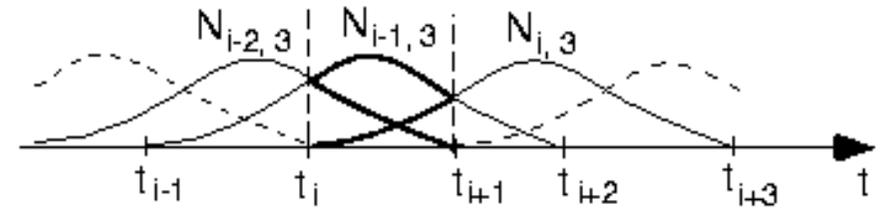
B-Splines der Ordnung 1, 2, 3 und 4:



## Beispiele von B-Splines

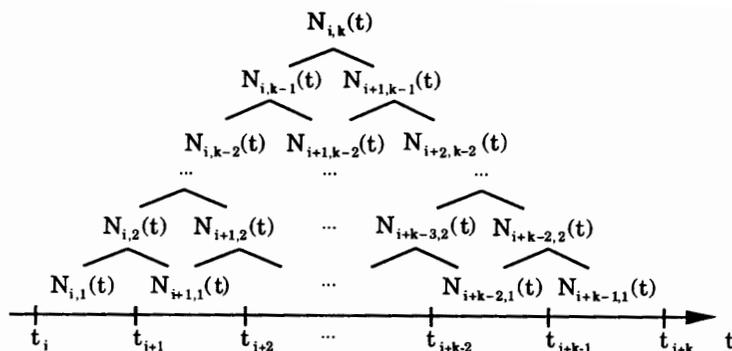
Innerhalb eines Parameterintervalls gibt es  $k$  sich überlappende B-Splines.

Ein Beispiel der kubischen B-Splines:



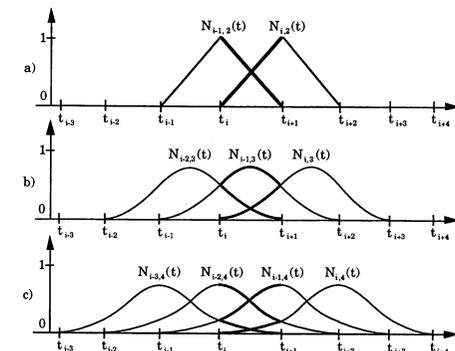
## B-Splines der Ordnung $k$

Das rekursive Definitionsverfahren einer B-Spline-Basisfunktion  $N_{i,k}(t)$ :

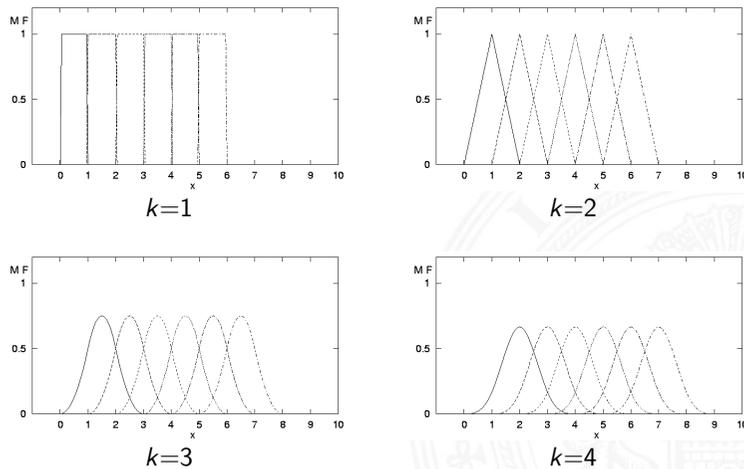


## B-Splines der Ordnung $k$

Aktuelle Segmente der B-Spline-Basisfunktionen der Ordnungen 2, 3 und 4 für  $t_i \leq t < t_{i+1}$ :

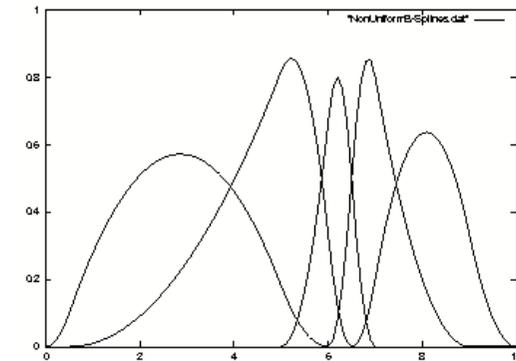


## Uniforme B-Splines der Ordnung 1 bis 4



## Nichtuniforme B-Splines

Ordnung 3:



## Eigenschaften der B-Splines

*Partition of unity:*  $\sum_{i=0}^k N_{i,k}(t) = 1.$

*Positivity:*  $N_{i,k}(t) \geq 0.$

*Local support:*  $N_{i,k}(t) = 0$  for  $t \notin [t_i, t_{i+k}].$

*$C^{k-2}$  continuity:* If the knots  $\{t_i\}$  are pairwise different from each other, then  $N_{i,k}(t) \in C^{k-2}$ , i.e.  $N_{i,k}(t)$  is  $(k-2)$  times continuously differentiable.

## Gewinnung einer B-Spline-Kurve

Eine B-Spline-Kurve kann dadurch konstruiert werden, dass eine Menge von vorgegebenen Größen mit diesen B-Splines gemischt werden:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{v}_j \cdot N_{j,k}(t)$$

wobei  $\mathbf{v}_j$  *Kontrollpunkte (de Boor-Punkte)* genannt werden. Sei ein Parameter  $t$  gegeben, wobei  $\mathbf{r}(t)$  ein Punkt dieser B-Spline-Kurve ist.

Wenn  $t$  von  $t_{k-1}$  bis zu  $t_{m+1}$  variiert, so stellt  $\mathbf{r}(t)$  eine  $C^{k-2}$  stetig differenzierbare Kurve dar.

## Berechnung von Kontrollpunkten aus Datenpunkten

Die Punkte  $\mathbf{v}_j$  sind nur bei  $k = 2$  identisch mit den Datenpunkten zur Interpolation, sonst nicht.

Ein Kontrollpunktzug bildet eine konvexe Hülle für die Interpolationskurve.

Zwei Verfahren zur Berechnung von Kontrollpunkten aus Datenpunkten:

- 1 Durch die Lösung des folgenden Gleichungssystems (**Böhm84**):

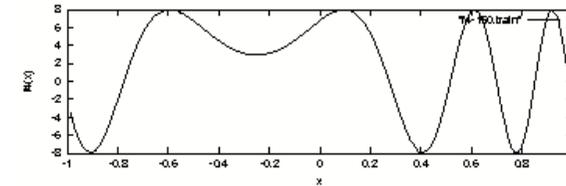
$$\mathbf{q}_j(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{v}_j \cdot N_{j,k}(t)$$

wobei  $\mathbf{q}_j$  die Datenpunkte für die Interpolation sind,  $j = 0, \dots, m$ .

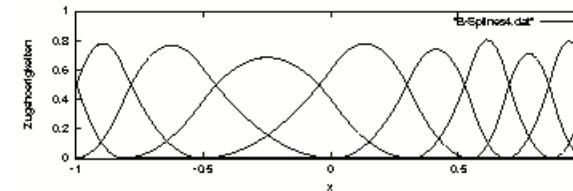
- 2 Durch Lernen basierend auf dem Gradient-Abstieg (**Zhang98**).

## Funktionsapproximation - 1D Beispiel

Eine Testfunktion  $f_4(x) = 8\sin(10x^2 + 5x + 1)$  mit  $-1 < x < 1$ :

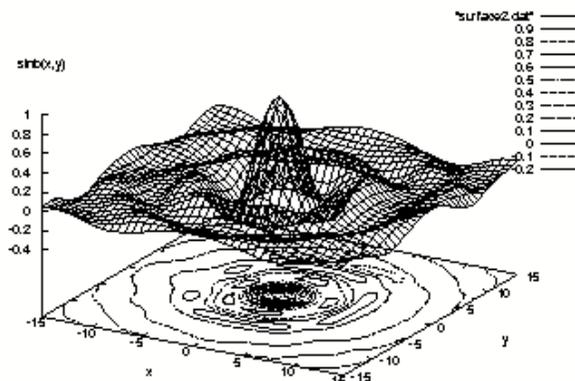


Die richtig verteilten B-Splines:

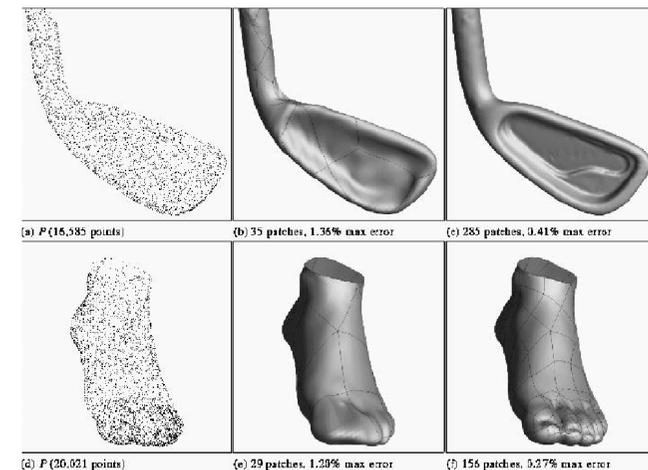


## Funktionsapproximation - 2D Beispiel

Approximation der Funktion  $\text{sinb}(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2} / \sqrt{x^2 + y^2})$



## Modellierung mit B-Splines – Beispiele mit 3D Objekten



# Modellierung mit B-Splines – Beispiele mit 3D Objekten

