Übungen zu "Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik"
SoSe 2011

Übungsblatt 8

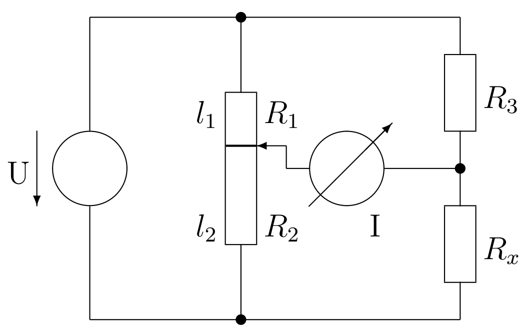
Ausgegeben am 8. Juni 2011
Abgabe der Lösungen (Papier oder elektronisch) bis Mittwoch 22. Juni

Aufgabe 1:
Eine Reihe von fünf Messungen ergibt folgende Werte:

2.0, 2.1, 1.85, 2.06, 1.95, 2.04

Bestimmen Sie den Mittelwert, die Standardabweichung, Varianz und den Fehler des Mittelwertes für diese Messreihe.
(3 Punkte)

Aufgabe 2:
In der elektrischen Messtechnik sind sog. Brückenschaltungen weit verbreitet. Als Beispiel soll hier die klassische Schaltung von Wheatstone zur Widerstandsmessung betrachtet werden. Sie hat folgenden Aufbau:



Der Widerstand R_3 sei bekannt und das Verhältnis von R_1 zu R_2 noch variabel. Dies lässt sich am einfachsten durch ein Potentiometer erreichen. Um die Größe des Widerstands R_x zu bestimmt, wird über die Quelle U eine Spannung angelegt und das Potentiometer so eingestellt, dass durch das Strommessgerät kein Strom fließt.

R_x lässt sich dann nach folgender Formel berechnen

$$R_x = R_3 \frac{l_2}{l_1}$$

Man hat also die Bestimmung von R_x auf das Messen zweier Längen zurückgeführt. Bemerkenswert ist, dass die Größe der angelegten Spannung U nicht mehr direkt mit in das Ergebnis eingeht. Praktisch ist es aber ratsam, mit einer möglichst hohen Spannung zu arbeiten.

a) Berechnen Sie R_x und schätzen Sie den Fehler von R_x ab, wenn Sie aus ihren Messwerten erhalten

$l_1 = (20 \pm 0.1)\,\text{cm}$, $l_2 = (20.05 \pm 0.1)\,\text{cm}$, $R_3 = (100 \pm 0.5)\,\Omega$.

b) Welche Werte erhalten Sie für

$l_1 = (3.64 \pm 0.05)\,\text{cm}$, $l_2 = (36.35 \pm 0.05)\,\text{cm}$, $R_3 = (10 \pm 0.1)\,\Omega$.

Wie sollte man R_3 möglichst wählen, um den Fehler für R_x gering zu halten?
(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und Δx_i die Messungenauigkeit (Fehler) der einzelnen x_i. Neben der in der Vorlesung genannten Formel für den Fehler von z

$$\Delta z = \left|\frac{\partial z}{x_1}\right| \cdot \Delta x_1 + \cdots + \left|\frac{\partial z}{x_n}\right| \cdot \Delta x_n$$

findet sich in der Literatur auch die folgende

$$\Delta_2 z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial z}{x_n} \cdot \Delta x_n\right)^2}$$

Zeigen Sie, dass gilt $\Delta_2 z \leq \Delta z$.
Hinweis: Es genügt, das für n= 2 zu zeigen. Wer möchte, kann natürlich auch den allgemeinen Fall behandeln.
(3 Punkte)

Aufgabe 4: Aus einer Messreihe erhalten Sie folgende Werte

x	0.0	0.2	0.5	1.0	1.2
y	0.08	0.48	1.1	2.1	2.4

Sie vermuten einen linearen Zusammenhang zwischen x und y. Bestimmen Sie die aufgrund der gegebenen Daten die Regressionsgerade. Wie groß ist der quadratische Fehler

$$\sum_{i=1}^{5} (m\, x_i + b - y_i)^2$$

zwischen Ihren Messpunkten und den Werten auf der Geraden? (4 Punkte)

Aufgabe 5:
Manchmal weiß man, dass die Gerade, die bei einer Messung den linearen Zusammenhang zwischen x und y beschreibt, durch den Nullpunkt gehen muss. Z.B. macht bei einem Widerstand eine Beziehung der Form $U = R\, I + U_0$ keinen Sinn, weil keine Spannung abfallen darf, wenn kein Strom fließt.

Leiten Sie eine Formel ab, mit der sich eine solche Regressionsgerade, die durch den Nullpunkt geht, berechnen lässt.

Was erhalten Sie für die Werte aus Aufgabe 3? Wie groß ist der quadratische Fehler?
(5 Punkte)