

64-544

Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik

[http://tams.informatik.uni-hamburg.de/
lectures/2011ss/vorlesung/GdSR](http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2011ss/vorlesung/GdSR)

Jianwei Zhang



Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Sommersemester 2011

Gliederung

1. Einführung
2. Grundlagen der Robotik
3. Grundlagen der Sensorik
4. Scandaten verarbeiten
5. Rekursive Zustandsschätzung
6. Fuzzy-Logik
7. Steuerungsarchitekturen





Gliederung

1. Einführung
2. Grundlagen der Robotik
3. Grundlagen der Sensorik
4. Scandaten verarbeiten
5. **Rekursive Zustandsschätzung**

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Stochastische Fortpflanzungsgesetze und Belief

Bayes-Filter

Selbst-Lokalisierung mobiler Roboter

Literatur

6. Fuzzy-Logik
7. Steuerungsarchitekturen



Rekursive Zustandsschätzung

- ▶ **Idee:** Schätzung eines Systemzustands, der nicht direkt gemessen werden kann, aber aus den Messungen ableitbar ist
 - ▶ Beobachtungen bestimmter Aspekte des Systems
 - ▶ Steueraktionen, die das System beeinflussen
 - ▶ Unsicherheit in Beobachtungen und Aktionen.
- ▶ Probabilistische Algorithmen zur Zustandsschätzungen berechnen eine **belief distribution** über die möglichen Zustände
- ▶ Der **belief** beschreibt das Wissen eines Systems über seinen Zustand



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- ▶ Sensorwerte, Stellgrößen, der Zustand eines Systems und von dessen Umgebung können als **Zufallsvariable** modelliert werden
- ▶ Sei X eine Zufallsvariable und x ein Wert, den diese annehmen kann
- ▶ Ist der Wertebereich W von X diskret mit $W = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, so schreibt man:

$$p(X = x)$$

um die Wahrscheinlichkeit anzugeben, dass X den Wert x hat



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Die Summe diskreter Wahrscheinlichkeiten ist 1:

$$\sum_x p(X = x) = 1$$

- ▶ Wahrscheinlichkeiten sind immer nicht-negativ, d.h.

$$p(X = x) \geq 0$$

- ▶ Wir schreiben $p(x)$ anstelle von $p(X = x)$



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Eine Funktion F , die durch die diskrete Zufallsvariable X bestimmt ist, heißt Verteilungsfunktion von X .

Beispiel: Wert der Zufallsvariablen \leq als vorgegebener Wert:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

- ▶ Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die über eine reellwertige Zufallsvariable X definiert ist, heißt Wahrscheinlichkeitsdichte oder Dichtefunktion

Beispiel: Wert der stetigen Zufallsvariablen im Intervall $[a, b]$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Der **Erwartungswert** einer Zufallsvariablen ist gegeben als:

$$E[X] = \mu = \sum_x x p(x) \quad (\text{diskret})$$

$$E[X] = \mu = \int x p(x) dx \quad (\text{kontinuierlich})$$

- ▶ Der Erwartungswert ist eine lineare Funktion einer Zufallsvariablen, d.h. es gilt:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Die **Varianz** σ^2 von X berechnet sich wie folgt:

$$\sigma^2 = E[X - \mu]^2 = E[X^2] - \mu^2$$

- ▶ Die Varianz misst das erwartete Quadrat der Abweichung vom Erwartungswert
- ▶ Für die Standardabweichung oder Streuung von X gilt:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{E[X - \mu]^2}$$



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Für die **Kovarianz Cov** zweier reeller Zufallsvariablen X, Y gilt:

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)))$$

unter der Voraussetzung, dass $E(X)$, $E(Y)$ und $E(XY)$ existiert.

- ▶ $\text{Cov}(X, Y) > 0$, falls monoton wachsender linearer Zusammenhang
- ▶ $\text{Cov}(X, Y) = 0$, falls kein linearer Zusammenhang zwischen den Variablen; möglicherweise aber ein nichtlinearer Zusammenhang, d. h. die Variablen sind nicht notwendigerweise stochastisch unabhängig.
- ▶ $\text{Cov}(X, Y) < 0$, falls monoton fallender linearer Zusammenhang
- ▶ keine Aussage über die Stärke des Zusammenhanges
- ▶ $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) = \sigma^2$
- ▶ falls X, Y stochastisch unabhängig, folgt $\text{Cov}(X, Y) = 0$



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ **Entropie** einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, dann gilt für die Entropie von P :

$$H(P) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

was dem Erwartungswert des Informationsgehaltes ($E[I(x)]$ mit $I(x) = \log_2 \frac{1}{p(x)} = -\log_2 p(x)$ [bit]) entspricht.

- ▶ Die Entropie ist die erwartete Information, die die Werte von x tragen



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Für $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ gelten folgende Schranken:

$$0 \leq H(p_1, \dots, p_n) \leq \log_2 n$$

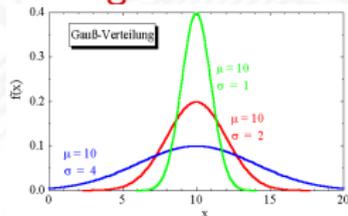
- ▶ untere Schranke von $H(p_1, \dots, p_n) = 0$ genau dann, wenn die W -Verteilung entartet ist; also wenn ein i existiert mit $p_i = 1$
- ▶ obere Schranke von $H(p_1, \dots, p_n) = \log_2 n$ genau dann, wenn $p_i = \frac{1}{n}, \forall i, 1 \leq i \leq n$
- ▶ Im diskreten Fall ist $-\log_2 p(x)$ die Anzahl der Bits, die notwendig sind, um x optimal zu kodieren, wenn $p(x)$ die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung von x ist



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Kann die Zufallsvariable einen kontinuierlichen Wert annehmen, dann wird sie durch eine **Dichtefunktion** beschrieben (engl. *probability density function, PDF*)
- ▶ Eine typische Dichtefunktion ist die **Normalverteilung** mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 :

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}$$



- ▶ Im mehrdimensionalen Fall mit Mittelwertsvektor μ und Kovarianzmatrix Σ :

$$p(x) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu) \Sigma^{-1} (x - \mu)^T \right\}$$



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Die Kovarianzmatrix Σ ist die Matrix der paarweisen Kovarianzen eines Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_n)$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_1, X_1) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \text{Cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

- ▶ Die **Kovarianzmatrix** Σ ist *positiv semidefinit* und *symmetrisch* ($x^T \Sigma x \geq 0$, diagonalisierbar, Eigenwerte ≥ 0)

- ▶ Für eine PDF gilt:
$$\int p(x) dx = 1$$

- ▶ Der Funktionswert einer PDF ist nicht wie bei diskreten Wahrscheinlichkeiten nach oben durch 1 begrenzt



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Für die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert x und Y den Wert y hat, schreibt man

$$p(x, y) = p(X = x \text{ und } Y = y)$$

- ▶ Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y von einander unabhängig gilt:

$$p(x, y) = p(x)p(y)$$

- ▶ Die Wahrscheinlichkeit für X unter der Voraussetzung, dass Y den Wert y besitzt (bedingte Wahrscheinlichkeit), wird wie folgt beschrieben

$$p(x|y) = p(X = x | Y = y)$$



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Gilt für diese **bedingte Wahrscheinlichkeit**, dass $p(y) > 0$ ist, gilt:

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

- ▶ Sind X und Y voneinander unabhängig, gilt:

$$p(x|y) = \frac{p(x)p(y)}{p(y)} = p(x)$$

- ▶ Das bedeutet, wenn X und Y unabhängig voneinander sind, sagt uns Y nichts über X



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$p(x) = \sum_y p(x|y)p(y) \quad (\text{diskret})$$

$$p(x) = \int p(x|y)p(y)dy \quad (\text{kontinuierlich})$$

- ▶ Satz von Bayes: (mit $p(y) > 0$)

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\sum_{x'} p(y|x')p(x')} \quad (\text{diskret})$$

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int p(y|x')p(x')dx} \quad (\text{kontinuierlich})$$

Satz von Bayes beschreibt Umkehrung von Schlussfolgerungen

- ▶ die Berechnung von $p(\text{Ereignis}|\text{Ursache})$ ist oft einfach
- ▶ aber gesucht ist $p(\text{Ursache}|\text{Ereignis})$



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Der Satz von Bayes spielt eine hervorgehobene Rolle
- ▶ Sei x die Größe, die wir aus y ableiten wollen, dann bezeichnet man die Grundwahrscheinlichkeit $p(x)$ als **A-Priori-Wahrscheinlichkeit** und y als **Daten** (z.B. Sensormessungen)
- ▶ Die Verteilung der $p(x)$ beschreibt das Wissen über X , bevor die Messung y berücksichtigt wird
- ▶ Die Verteilung der $p(x|y)$ wird als **A-Posteriori-Wahrscheinlichkeit** von X bezeichnet
- ▶ Der Satz von Bayes erlaubt die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(x|y)$ zu berechnen, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine Messung y bei einem Zustand x ($p(y|x)$) und die Grundwahrscheinlichkeiten $p(x)$ und $p(y)$ bekannt sind



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Im Satz von Bayes hängt die Grundwahrscheinlichkeit $p(y)$ nicht von x ab
- ▶ Daher ist der Faktor $p(y)^{-1}$ für jeden Wert x in $p(x|y)$ gleich
- ▶ Dieser Faktor wird meist als Normalisierungsfaktor im Satz von Bayes notiert:

$$p(x|y) = \eta p(y|x)p(x)$$

- ▶ Der Faktor η wird derart gewählt, dass die Normierung der Verteilung auf 1 erhalten bleibt
- ▶ η bezeichnet im Folgenden immer solche Normalisierungsfaktoren, deren eigentliche Werte sich aber unterscheiden können



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ Alle bisherigen Regeln können durch eine weitere Zufallsvariable Z bedingt sein
- ▶ Dies bedeutet für den Satz von Bayes mit $Z = z$:

$$p(x|y, z) = \frac{p(y|x, z)p(x|z)}{p(y|z)}$$

solange $p(y|z) > 0$

- ▶ Für die Regel zur Kombination unabhängiger Zufallsvariablen ($p(a, b) = p(a)p(b)$) gilt analog:

$$p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z)$$



Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (cont.)

- ▶ $p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z)$ besagt, dass y keine Information über x trägt, wenn z bekannt ist
- ▶ Obige Formel beschreibt eine **bedingte Unabhängigkeit** und ist äquivalent zu

$$p(x|z) = p(x|z, y)$$

$$p(y|z) = p(y|z, x)$$

- ▶ Die Formel impliziert **nicht**, dass X unabhängig von Y ist:

$$p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z) \not\Rightarrow p(x, y) = p(x)p(y)$$

und die Umkehrung gilt generell auch nicht:

$$p(x, y) = p(x)p(y) \not\Rightarrow p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z)$$



Stochastische Fortpflanzungsgesetze

- ▶ Der Zustand eines Systems lässt sich durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

beschreiben, die abhängig ist von

- ▶ den bisherigen Zuständen $x_{0:t-1}$
- ▶ allen bisherigen Messungen $z_{1:t-1}$ und
- ▶ allen bisherigen Stellgrößen (Steuerkommandos) $u_{1:t}$



Stochastische Fortpflanzungsgesetze (cont.)

- ▶ Ist der Zustand x_t **komplett**, dann fasst die Stellgröße u_t und der Zustand x_{t-1} alle bisherigen Ereignisse zusammen:

$$p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

- ▶ Für die Messungen gilt dann entsprechend:

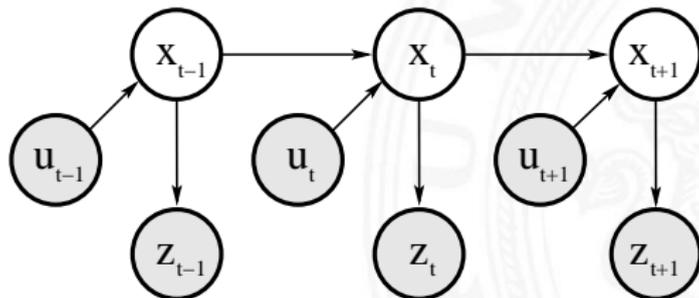
$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t | x_t)$$

- ▶ Der Zustand x_t ist ausreichend um die Messung z_t vorherzusagen
- ▶ Die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(x_t | x_{t-1}, u_t)$ wird als **Zustandsübergangswahrscheinlichkeit** bezeichnet
 - ▶ Sie beschreibt wie sich der Zustand der Umgebung abhängig von den Stellgrößen ändert
- ▶ Die Wahrscheinlichkeit $p(z_t | x_t)$ wird **Wahrscheinlichkeit der Messung** genannt



Stochastische Fortpflanzungsgesetze (cont.)

- ▶ Zustandsübergangswahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeit der Messung beschreiben zusammen ein **dynamisches stochastisches System**
- ▶ Eine solche Systembeschreibung ist auch bekannt als **hidden Markov model (HMM)** oder **dynamic Bayes network (DBN)**





Belief

- ▶ Als **belief** bezeichnet man das Wissen (Schätzung) eines Systems über seinen Zustand
- ▶ Der *wahre Zustand* eines Systems ist nicht dasselbe
- ▶ Der *belief* ist die A-Posteriori-Wahrscheinlichkeit der Zustandsvariablen anhand der bisherigen Daten:

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$$

- ▶ Diese Definition berechnet den *belief* (als Wahrscheinlichkeit) nach der aktuellen Messung x_t



Belief (cont.)

- ▶ Der *belief* vor der Messung wird als

$$\overline{bel}(x_t) = p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

definiert und meist als **Vorhersage** (engl. *prediction*) bezeichnet

- ▶ Der Schritt zur Berechnung von $bel(x_t)$ aus der Vorhersage $\overline{bel}(x_t)$ wird als **Korrektur** (engl. *correction* oder *measurement update*) bezeichnet



Bayes-Filter

- ▶ Ein allgemeiner Algorithmus, um *beliefs* zu berechnen, ist der **Bayes-Filter-Algorithmus**
- ▶ Der Algorithmus ist rekursiv und berechnet $bel(x_t)$ zum Zeitpunkt t aus folgenden Größen
 - ▶ $bel(x_{t-1})$ zum Zeitpunkt $t - 1$ (alter belief)
 - ▶ der Stellgröße u_t (aktuelle Stellgröße)
 - ▶ der Messung z_t (aktuelle Messung)



Bayes-Filter-Algorithmus

Bayes-Filter ($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$):

1. **for all** x_t **do**
2. $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$
3. $bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$
4. **endfor**
5. **return** $bel(x_t)$



Bayes-Filter-Algorithmus (cont.)

- ▶ In Zeile 2 wird die Stellgröße u_t verarbeitet
 - ▶ $\overline{bel}(x_t)$ ist das Integral des Produktes zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen:
 - ▶ die Wahrscheinlichkeit für Zustand x_{t-1} und
 - ▶ die Wahrscheinlichkeit das mit u_t in den Zustand x_t gewechselt wird
 - ▶ Das ist die **Vorhersage**
- ▶ In Zeile 3 findet die **Korrektur** statt
 - ▶ Vorhersage ($\overline{bel}(x_t)$) wird mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert, dass die Messung z_t in diesem Zustand wahrgenommen wird



Bayes-Filter-Algorithmus (cont.)

- ▶ Der Algorithmus muss mit einem *belief* zum Zeitpunkt $t = 0$ initialisiert werden
- ▶ In den meisten Fällen ist der Startzustand x_0 bekannt und die Wahrscheinlichkeit kann für alle anderen Zustände gleich 0 gesetzt werden
- ▶ Oder der Zustand ist unbekannt und alle Zustände werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit initialisiert



Bayes-Filter-Algorithmus (cont.)

- ▶ Der Algorithmus kann in dieser Form nur für sehr einfache Probleme implementiert werden
- ▶ Entweder muss die Integration in Zeile 2 und die Multiplikation in Zeile 3 in geschlossener Form möglich sein
- ▶ oder ein endlicher Zustandsraum muss gegeben sein, so dass das Integral in Zeile 2 zu einer Summe wird



Mathematische Herleitung des Bayes-Filter

- ▶ **Beweis durch Induktion:** Zeige, dass $\overline{bel}(x_t) = p(x_t|z_{1:t}, u_{1:t})$ aus $p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})$ hergeleitet werden kann
- ▶ **Beweis-Basis:** Korrekte Initialisierung von $bel(x_0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$
- ▶ **Bedingungen:** Zustand x_t ist komplett und die Stellgrößen werden zufällig gewählt
- ▶ Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$\begin{aligned}
 bel(x_t) = p(x_t|z_{1:t}, u_{1:t}) &= \frac{p(z_t|x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t})p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})}{p(z_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})} \\
 &= \eta p(z_t|x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t})p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})
 \end{aligned}$$



Mathematische Herleitung des Bayes-Filter (cont.)

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t}) = \eta p(z_t | x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

- ▶ Da der Zustand komplett ist, gilt (bedingte Unabhängigkeit)

$$p(z_t | x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t | x_t)$$

- ▶ Daraus folgt:

$$p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t}) = \eta p(z_t | x_t) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

- ▶ und damit

$$bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$$

was Zeile 3 des Bayes-Filter-Algorithmus entspricht



Mathematische Herleitung des Bayes-Filter (cont.)

- ▶ Nach dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned}\overline{bel}(x_t) &= p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\ &= \int p(x_t | x_{t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1}\end{aligned}$$

- ▶ Wieder gilt, wenn wir x_{t-1} kennen, liefern $z_{1:t-1}$ und $u_{1:t-1}$ keine zusätzliche Information
- ▶ Daher gilt die Vereinfachung

$$p(x_t | x_{t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

- ▶ u_t bleibt, da diese Stellgröße erst zum Zustandsübergang führt



Mathematische Herleitung des Bayes-Filter (cont.)

- ▶ Bei zufällig gewählten Stellgrößen kann u_t daher auch in den Bedingungen für $p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t})$ weggelassen werden
- ▶ Es ergibt sich mit

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t|x_{t-1}, u_t) p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1}$$

die 2. Zeile des Bayes-Filter-Algorithmus



Mathematische Herleitung des Bayes-Filter (cont.)

- ▶ Für konkrete Implementierungen des Bayes-Filter-Algorithmus werden drei Wahrscheinlichkeitsverteilungen benötigt:
 - ▶ der initiale *belief* $p(x_0)$
 - ▶ die Wahrscheinlichkeit der Messungen $p(z_t|x_t)$
 - ▶ die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten $p(x_t|u_t, x_{t-1})$



Markov-Annahme

- ▶ Die Annahme, dass ein Zustand komplett ist, wird **Markov-Annahme** (engl. *Markov assumption*) genannt
- ▶ Die Annahme fordert, dass vergangene und zukünftige Daten unabhängig sind, wenn man den aktuellen Zustand x_t kennt



Markov-Annahme (cont.)

- ▶ Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, wie hart diese Annahme ist:
 - ▶ Zur Lokalisierung mobiler Roboter werden Bayes-Filter eingesetzt
 - ▶ Dabei ist x_t die Position im Raum (Pose) des Roboters mit Bezug auf eine feste Karte
 - ▶ Es gibt Effekte die die Sensormessungen systematisch verfälschen und damit die Markov-Annahme zunichte machen:
 - ▶ Einfluss sich bewegender Personen auf die Sensormessungen
 - ▶ Ungenauigkeiten in den probabilistischen Modellen $p(z_t|x_t)$ und $p(x_t|u_t, x_{t-1})$
 - ▶ Rundungsfehler, wenn Näherungen für die Repräsentation des *beliefs* verwendet werden
 - ▶ Variablen innerhalb der Software, die mehrere Stellgrößen beeinflussen



Markov-Annahme (cont.)

- ▶ Einige dieser Variablen könnten im Zustand berücksichtigt werden, werden aber oft fallen gelassen, um den rechnerischen Aufwand zu verringern
- ▶ In der Praxis sind Bayes-Filter erstaunlich robust gegen die Verletzung der Markov-Annahme



Darstellung und Berechnung

- ▶ Bayes-Filter können auf unterschiedliche Weise implementiert werden
- ▶ Die Techniken basieren auf unterschiedlichen Annahmen über die Wahrscheinlichkeiten für die Messungen, die Zustandsübergänge und den *belief*
- ▶ Die Algorithmen besitzen dadurch unterschiedliche rechnerische Eigenschaften
- ▶ In den meisten Fällen müssen die *beliefs* angenähert werden
- ▶ Dies hat Auswirkungen auf die Komplexität der Algorithmen
- ▶ Keine der verschiedenen Techniken ist generell zu bevorzugen



Beispiele

- ▶ Kalman-Filter
 - ▶ Fehlerverteilung der Messfehler durch Gaussverteilung modelliert
 - ▶ Veränderung des Zustandes linear und a-priori bekannt
- ▶ Partikelfilter
 - ▶ von gitterbasierter Lokalisierung abgeleitet
 - ▶ keine Annahme der Normalverteilung des geschätzten Wertes
 - ▶ Schätzung wird als Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert
 - ▶ Verteilung wird an ausgewählten Stellen, den sog. Partikeln diskretisiert und zwischen diesen wird interpoliert.



Effizienz

- ▶ Einige Näherungen bedingen polynomiale Laufzeiten in Abhängigkeit von der Dimension des Zustands (z.B. Kalman-Filter)
- ▶ Einige haben exponentielle Laufzeiten (z. B. gridbasierte Techniken)
- ▶ Partikel-basierte Verfahren haben eine Laufzeit, die von der gewünschten Genauigkeit abhängt



Genauigkeit

- ▶ Einige Näherungen eignen sich besser, um eine Reihe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen anzunähern
- ▶ Beispielsweise eignen sich Normalverteilungen für uni-modale Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ▶ Histogramme können multimodale Verteilungen besser annähern, aber auf Kosten der Genauigkeit
- ▶ Partikel-Techniken können eine Vielzahl von Verteilungen annähern, wodurch allerdings die Anzahl der Partikel sehr groß werden kann



Einfachheit der Implementierung

- ▶ Abhängig von der Form der Verteilungen kann die Implementierung der Verfahren aufwändig sein
- ▶ Weil Partikel-Techniken meist sehr einfach für nicht-lineare Systeme implementiert werden können, sind sie zurzeit sehr populär



Zusammenfassung

- ▶ Die Interaktion zwischen einem Roboter und dessen Umgebung wird modelliert als gekoppeltes dynamisches System. Der Roboter setzt dazu Stellgrößen um die Umgebung zu manipulieren und nimmt die Umgebung über Sensormessungen wahr.
- ▶ Die Dynamiken werden charakterisiert durch zwei wahrscheinlichkeitstheoretische Gesetze
 - ▶ die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für den Zustandsübergang
 - ▶ die $p(z_t | x_t)$ die Messungen

Erstere beschreibt wie der Zustand sich mit der Zeit ändert, die Zweite, wie Messungen wahrgenommen werden.



Zusammenfassung (cont.)

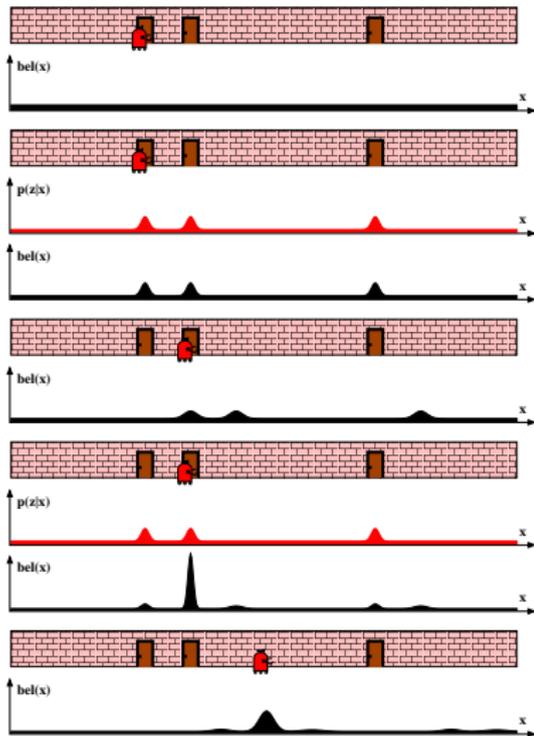
- ▶ Der *belief* ist die A-Posteriori-Wahrscheinlichkeit des Zustands; gegeben: Alle bisherigen Messungen und Stellgrößen. Der *Bayes-Filter* ist ein Algorithmus um den *belief* zu berechnen. Er ist rekursiv, d.h. der *belief* zum Zeitpunkt t wird aus dem *belief* zum Zeitpunkt $t-1$ berechnet.
- ▶ Der Bayes-Filter macht eine *Markov-Annahme*, d.h. der Zustand ist eine komplette Zusammenfassung der Vergangenheit.
Diese Annahme trifft in der Praxis meist nicht zu.
- ▶ Bayes-Filter sollten vor ihrem Einsatz in speziellen Anwendungen anhand verschiedener Kriterien wie Genauigkeit, Effizienz und Einfachheit evaluiert werden .



Markov-Lokalisierung

- ▶ Wahrscheinlichkeitstheoretische Lokalisierungsverfahren sind Varianten des Bayes-Filters
- ▶ Die direkte Anwendung des Bayes-Filters wird **Markov-Lokalisierung** genannt
- ▶ Markov-Lokalisierungen benötigen zusätzlich eine Karte der Umgebung
- ▶ Die Karte spielt eine Rolle im Messmodell (teilweise auch im Bewegungsmodell)
- ▶ Markov-Lokalisierung wird verwendet für
 - ▶ globale Lokalisierung
 - ▶ Positions-Tracking
 - ▶ das Kidnapped-Robot-Problem

Markov-Lokalisierung (cont.)



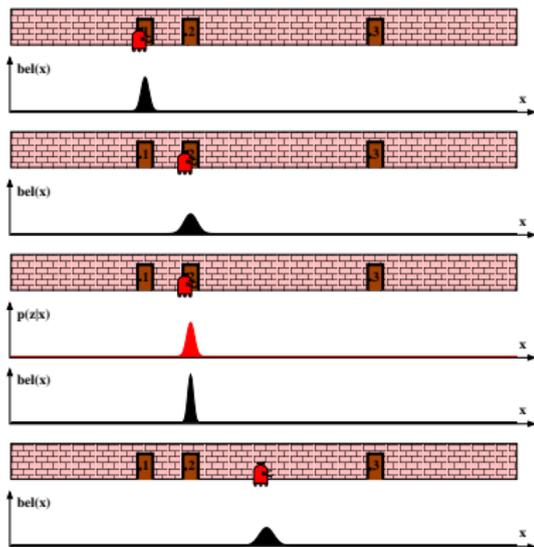


Extended Kalman Filter Lokalisierung

- ▶ Ein besonderer Fall der Markov-Lokalisierung ist der **extended Kalman filter localisation** Algorithmus (oder EKF-Lokalisierung)
- ▶ Die EKF-Lokalisierung repräsentiert den *belief* $bel(x_t)$ durch den Mittelwert μ_t und die Kovarianzmatrix Σ_t
- ▶ Die Karte ist dabei eine Sammlung von Merkmalen
- ▶ Der Roboter misst die Entfernung und Richtung einiger Merkmale in seiner Nähe



Extended Kalman Filter Lokalisierung (cont.)





Grid-Lokalisierung

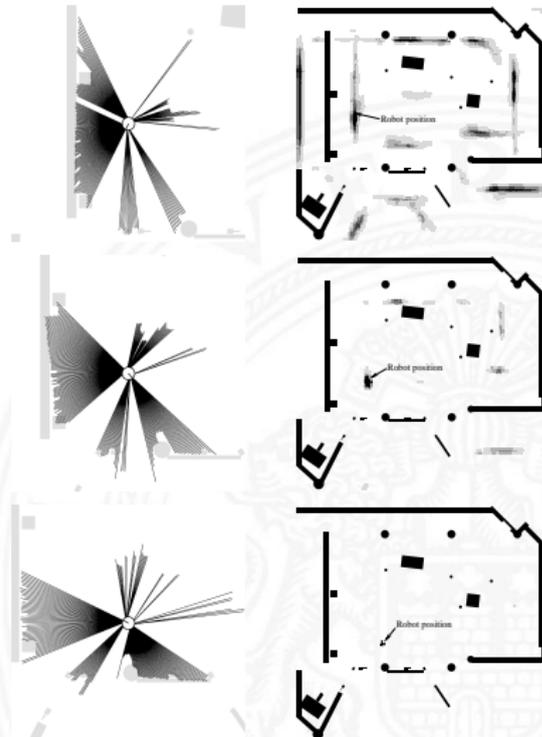
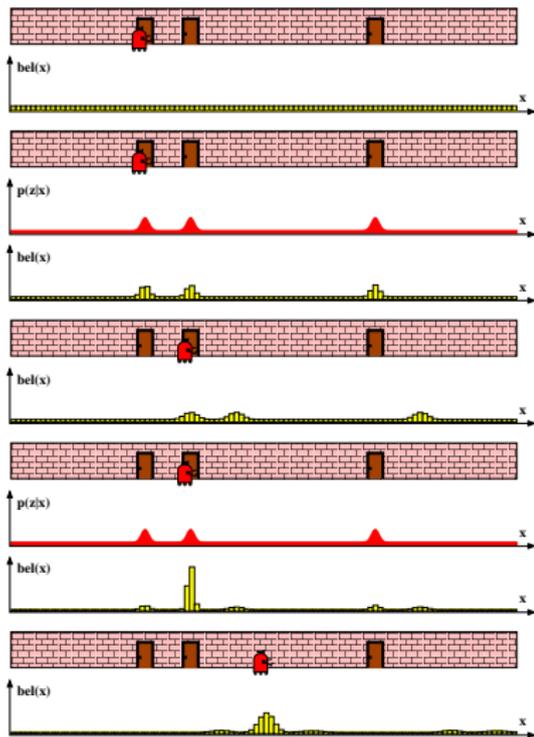
- ▶ **Grid-Lokalisierung** approximiert den *belief* durch einen **Histogram-Filter** über die Grid-Dekomposition des Zustandsraumes
- ▶ Dieser diskrete Bayes-Filter verwaltet eine Menge diskreter Wahrscheinlichkeitswerte:

$$belx_t = \{p_{k,t}\}$$

wobei jedes $p_{k,t}$ zu einer Grid-Zelle x_k gehört

- ▶ Typische Werte für die Zellengröße in der Praxis sind 15cm Kantenlänge und 5° Winkelauflösung

Grid-Lokalisierung (cont.)



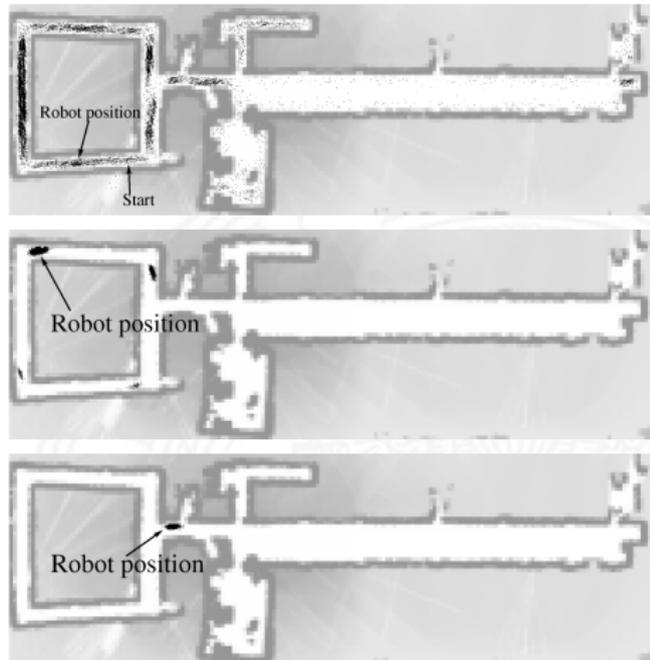
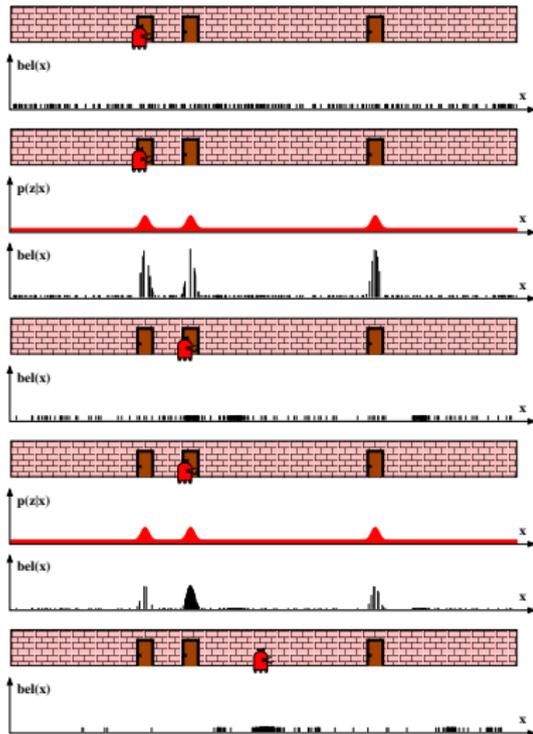


Monte-Carlo-Lokalisierung

- ▶ **Monte-Carlo-Lokalisierung** (MCL) approximiert den *belief* durch eine Menge von Partikeln
- ▶ Sehr populär
- ▶ Mit MCL können nahezu beliebige Verteilungsfunktionen angenähert werden
- ▶ Es können multimodale und unimodale Verteilungen approximiert und übergangslos zwischen ihnen gewechselt werden
- ▶ Eine höhere Anzahl von Partikeln erhöht die Genauigkeit



Monte-Carlo-Lokalisierung (cont.)





[TBF05] Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, Dieter Fox,
Ronald C. Arkin (Hrsg.):
Probabilistic Robotics.
MIT Press; Cambridge, Massachusetts, 2005
(Intelligent Robotics and Autonomous Agents). –
Kapitel 2