Dynamic Programming

Ziele dieser Vorlesung:

- Überblick über eine Sammlung klassischer Lösungsmethoden für MDPs, die $dynamic\,programming$ genannt werden
- Demonstration des Einsatzes von DP beim Errechnen von Wertefunktionen und somit von optimalen $Policies$
- Diskussion der Effektivität und des Nutzens von DP

Dieser Teil ist aus "Reinforcement Learning: An Introduction", Richard S. Sutton and Andrew G. Barto

Policy Evaluierung

***Policy* Evaluierung**: Errechne die Zustands-Wertefunktion V^π für eine gegebene $Policy\,\pi$.

Erinnern wir uns:
Zustands-Wertefunktion für *Policy* π :

$$V^\pi(s) = E_\pi\left\{R_t | s_t = s\right\} = E_\pi\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k r_{t+k+1} | s_t = s\right\}$$

Bellman-Gleichung für V^π:

$$V^\pi(s) = \sum_a \pi(s,a)\sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V^\pi(s')]$$

– ein System von $|S|$ gleichzeitigen linearen Gleichungen

Iterative Methoden

$$V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow \ldots \rightarrow V_k \rightarrow V_{k+1} \rightarrow \ldots \rightarrow V^\pi$$
$$\Uparrow \text{ ein “Durchlauf”}$$

Ein Durchlauf besteht darin, auf jeden Zustand eine Backup-Operation anzuwenden.

Ein $full - policy$ Evaluierungs-Backup:

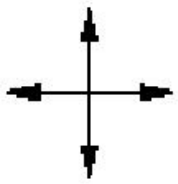
$$V_{k+1}(s) \leftarrow \sum_a \pi(s,a) \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V_k(s')]$$

Iterative *Policy* Evaluierung

`Input` π, die zu evaluierende $Policy$
`Initialisiere` $V(s) = 0$, für alle $s \in S^+$
`Wiederhole`
    $\Delta \leftarrow 0$
    Für jedes $s \in S$:
        $v \leftarrow V(s)$
        $V(s) \leftarrow \sum_a \pi(s,a) \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V_k(s')]$
        $\Delta <\leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$

bis $\Delta < \theta$ (eine kleine positive Zahl)
Output $V \approx V^\pi$

Eine kleine *Gridworld*

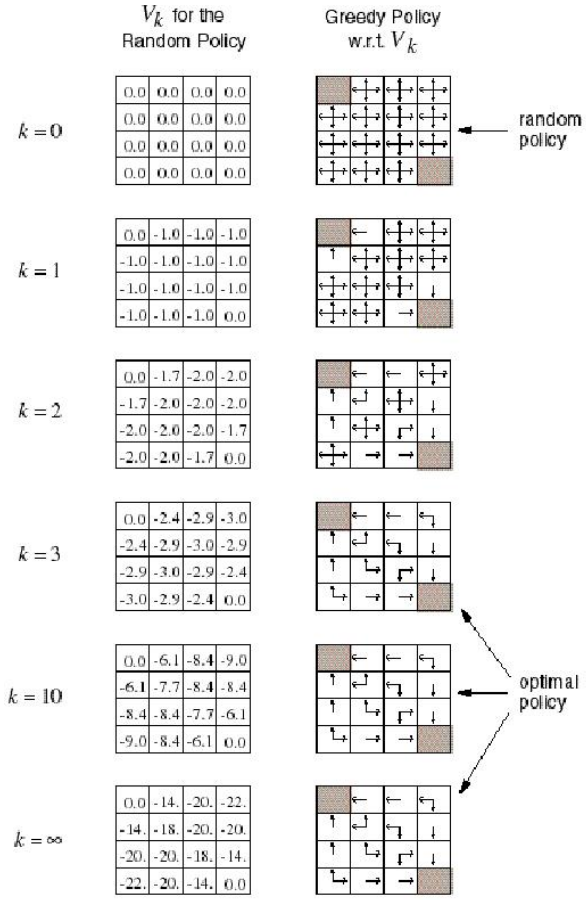


	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	

$r = -1$
on all transitions

- Eine episodische Aufgabe ($undiscounted$)
- Nicht-terminale Zustände :$1, 2, \ldots, 14$;
- Ein terminaler Zustand (zweimal als schattiertes Quadrat dargestellt)
- Aktionen, die den Agenten aus dem $Grid$ nehmen würden, lasssen den Zustand unverändert
- Der $Reward$ ist - 1 bis der terminale Zustand erreicht ist

Iterative *Policy* Evaluierung für die kleine *Gridworld*



π = zufällige (gleichförmige) Aktions-Entscheidungen

Policy Verbesserung

Angenommen, wir haben V^π für eine deterministische $Policy\, \pi$ berechnet.

Wäre es besser für einen gegebenen Zustand s eine Aktion $a \neq \pi(s)$ durchzuführen?

Der Wert, wenn a im Zustand s durchgeführt wird, ist:

$$\begin{aligned} Q^\pi(s,a) &= E_\pi\{r_{r+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1}) | s_t = s, a_t = a\} \\ &= \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

Es ist genau dann besser, zur Aktion a für den Zustand s zu wechseln, wenn

$$Q^\pi(s,a) > V^\pi(s)$$

Policy Verbesserung Forts.

Führe dies für alle Zustände durch, um eine neue $Policy\,\pi$ zu bekommen, die in Bezug auf V^π ***greedy*** ist:

$$\begin{aligned}\pi'(s) &= \operatorname*{argmax}_a Q^\pi(s,a) \\ &= \operatorname*{argmax}_a \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V^\pi(s')]\end{aligned}$$

Dann $V^{\pi'} \geq V^\pi$

Policy Verbesserung Forts.

Was wenn $V^{\pi'} = V^{\pi}$?
Z.B. für alle $s \in S$, $\quad V^{\pi'}(s) = \max_a \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V^{\pi}(s')]$?

Aber dies ist die optimale Bellman-Gleichung.

Also sind $V^{\pi'} = V^*$ und sowohl π als auch π' optimale $Policies$.

Policy Iteration

$$\pi_0 \rightarrow V^{\pi_0} \rightarrow \pi_1 \rightarrow V^{\pi_1} \rightarrow \ldots \pi^* \rightarrow V^* \rightarrow \pi^*$$

$Policy$ Evaluierung $\Uparrow$ $\Uparrow$ $Policy$ Verbesserung "Greedification""

Policy Iteration

1. Initialisierung
   $V(s) \in \Re$ und $\pi(s) \in A(s)$ beliebig für alle $s \in S$

2. $Policy$ Evaluierung
   Wiederhole
   $\Delta \leftarrow 0$
   `Für jedes` $s \in S$:
   $v \leftarrow V(s)$
   $V(s) \leftarrow \sum_{s'} P_{ss'}^{\pi(s)} [R_{ss'}^{\pi(s)} + \gamma V(s')]$
   $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$
   bis $\Delta < \theta$ (eine kleine positive Zahl)

3. $Policy$ Verbesserung
   $Policy\text{-}stable \leftarrow$ wahr
   Für jedes $s \in S$:
      $b \leftarrow \pi(s)$
      $\pi(s) \leftarrow \arg\max_a \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V(s')]$
      Wenn $b \neq \pi(s)$, dann $Policy\text{-}stable \leftarrow$ falsch
   Wenn $Policy\text{-}stable$, dann aufhören; ansonsten gehe zu 2

Wert Iteration

Erinnern wir uns an das ***full policy*** **Evaluierungs-*Backup***

$$V_{k+1}(s) \leftarrow \sum_a \pi(s,a) \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V_k(s')]$$

Hier ist das ***full value*** **Iterations-*Backup***:

$$V_{k+1}(s) \leftarrow \max_a \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V_k(s')]$$

Wert Iteration Forts.

Initialisiere V beliebig, z.B. $V(s) = 0$, für alle $s \in S^+$
Wiederhole

$\Delta \leftarrow 0$
`Für jedes` $s \in S$:
$v \leftarrow V(s)$
$V(s) \leftarrow \max_a \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V(s')]$
$\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$

bis $\Delta < \theta$ (eine kleine positive Zahl)

Output ist eine deterministische $Policy$, π, so dass
$\pi(s) = \arg\max_a \sum_{s'} P^a_{ss'}[R^a_{ss'} + \gamma V(s')]$

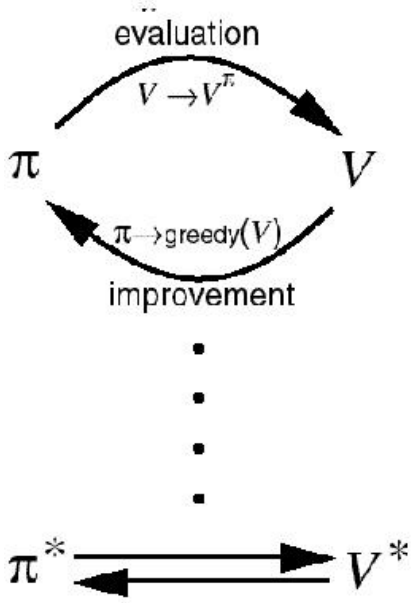
Asynchrones DP

- Alle DP Methoden, die bisher beschrieben wurden, erfordern vollständige Durchläufe des gesamten Zustands-Sets
- Das asynchrone DP benutzt keine Durchläufe. Stattdessen funktioniert es so:
  - Wiederhole bis das Konvergenzkriterium eingehalten wird:
    - Suche einen Zustand zufällig heraus und wende das passende $Backup$ an
- Benötigt immer noch viel Berechnung, aber hängt nicht in hoffnungslos langen Durchläufen fest
- Kann man Zustände für die Anwendung des $Backup$ intelligent auswählen? JA: die Erfahrung eines Agenten kann als Führer dienen

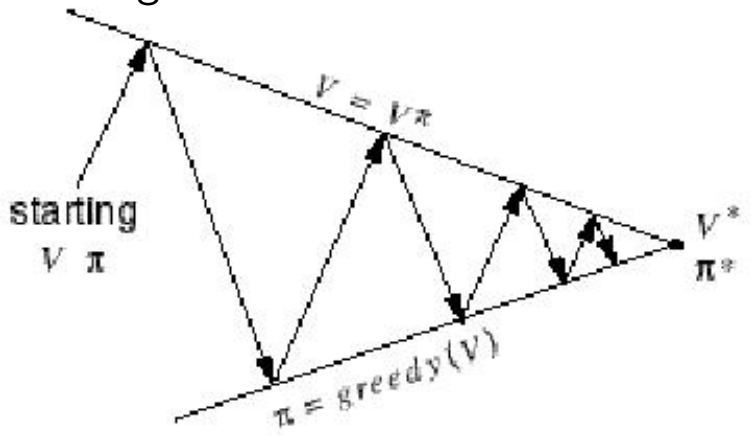
Generalized *Policy* Iteration (GPI)

***Generalized Policy* Iteration** (GPI):

jede Interaktion zwischen $Policy$ Evaluierung und $Policy$ Verbesserung, unabhängig von ihrer Granularität.



Eine geometrische Metapher für die Konvergenz von GPI:



Effizienz des DP

- Eine optimale $Policy$ zu finden ist polynomisch mit der Zahl der Zustände...
- ABER, die Zahl der Zustände ist oft astronomisch, z.B. wächt sie oft exponentiell mit der Zahl der Zustands-Variablen (was Bellman "den Fluch der Dimensionalität" nannte)
- In der Praxis kann das klassische DP auf Probleme mit ein paar Millionen Zuständen angewandt werden
- Das asynchrone DP kann auf größere Probleme angewandt werden und eignet sich für parallele Berechnung
- Es ist überraschend leicht, MDPs zu finden, für die DP Methoden unpraktisch sind

Zusammenfassung

- $Policy$ Evaluierung: $Backups$ ohne Maximum
- $Policy$ Verbesserung: bilde eine $greedy\, Policy$, wenn auch nur lokal
- $Policy$ Iteration: wechsle die beiden obigen Prozesse ab
- Wert Iteration: $Backups$ mit Maximum
- Vollständige $Backups$ (die später Beispiel-$Backups$ gegenübergestellt werden)
- Generalized $Policy$ Iteration (GPI)
- Asynchrones DP: eine Methode, um vollständige Durchläufe zu vermeiden
- $Bootstrapping$: Schätzungen durch andere Schätzungen auf den neuesten Stand bringen