Einführung - Fourierreihen

Im folgenden soll versucht werden, den Begriff der Fouriertransformation und einiger Begriffe, die damit im Zusammenhang stehen, etwas klarer zu machen. Auf eine wirklich saubere mathematische Beweisführung wird dabei verzichtet, sondern es soll eher anhand einiger Beispiele gezeigt werden, wozu man die Informationen, die man aus dieser Transformation erhält, benutzen kann.

Bevor wir auf den Begriff der Fouriertransformation, der für die Nachrichtentechnik von entscheidender Bedeutung ist, kommen, sei zunächst an das erinnert, was man (vielleicht) über das einfachere Gegenstück, die Fourierreihen, gelernt hat. Dazu betrachten wir eine *periodische* Funktion $f(t)$ mit der Periode T, d.h. es gilt $f(t+T) = f(t)$ für alle t. Weiterhin sei $f = 1/T$ die Frequenz und $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz der Funktion. Man kann nun zeigen, dass sich unter recht allgemeinen Bedingung (stückweise Stetigkeit und Beschränktheit in Interval $[0, T]$), die in der Praxis fast immer gegeben sind, $f(t)$ in eine sog. *Fourier-Reihe* entwickeln lässt.

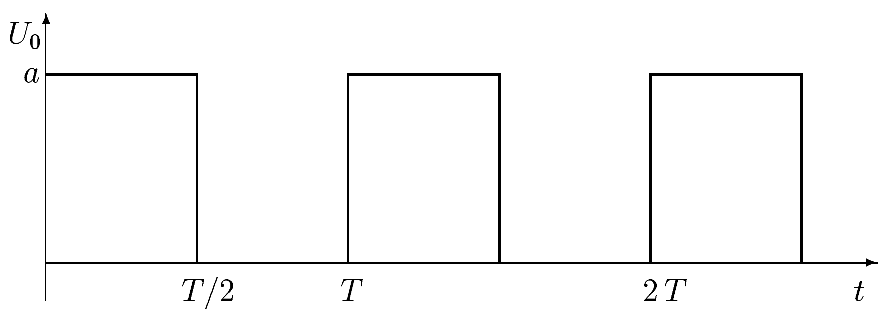
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\omega t + b_\nu \sin \nu\omega t)$$

mit

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos \nu\omega t dt \\ b_\nu &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin \nu\omega t dt \end{aligned}$$

Betrachten wir als Beispiel die folgende Funktion (ein periodisches Rechteck):

$$U_0(t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$$



Es ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T U_0(t)\,dt = \frac{2}{T}(\int_0^{T/2} a\,dt + \int_{T/2}^T 0\,dt) \\ &= a \end{aligned}$$

Für die Integration der übrigen Integrals ist die Substitution $x = \nu\omega t$ nützlich, also

$$\frac{dx}{dt} = \nu\omega = \frac{2\pi\nu}{T} \Rightarrow dt = \frac{T}{2\pi\nu}\,dx$$

Die Integration führt man hier, da U_0 in der zweiten Hälfte der Periode Null ist, nur bis $T/2$ durch bzw. bis $x = \nu\omega\frac{T}{2} = \nu\pi$:

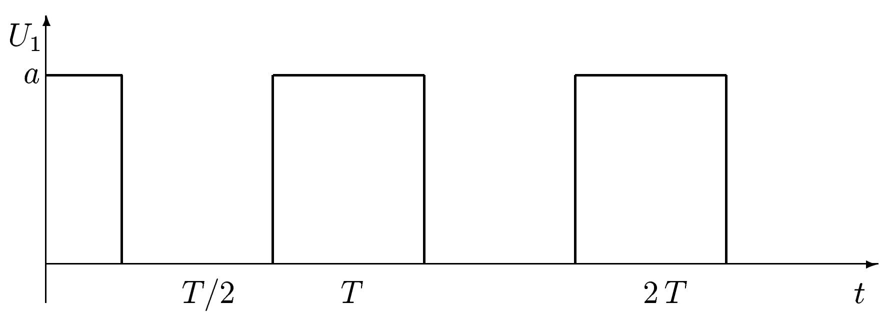
$$\begin{aligned}
a_\nu &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a\cos\nu\omega t\,dt \\
&= \frac{a}{\nu\omega}\int_0^{\nu\pi} \cos x\,dx \\
&= 0 \\
b_\nu &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a\sin\nu\omega t\,dt \\
&= \frac{a}{\nu\pi}\int_0^{\nu\pi} \sin x\,dx \\
&= \frac{a}{\nu\pi}(1-\cos\nu\pi) \\
&= \begin{cases} \frac{2a}{\nu\pi} & \text{für ungerades } \nu \\ 0 & \text{für gerades } \nu \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe des periodischen Rechtecks enthält demnach keine Cosinus-Anteile und Sinus-Anteile nur im ungeradzahligen Vielfachen von ω_0:

$$U_0(t) = \frac{a}{2} + \frac{2\,a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\,n+1)\omega t}{2\,n+1}$$

Das Gegenstück ist die Fourierreihe der folgenden Funktion

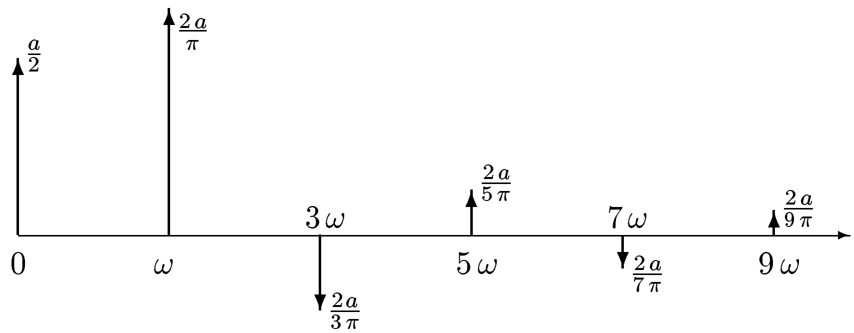
$$U_1(t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \le t < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \\ a & \text{für } \frac{3T}{4} \le t < T \end{cases}$$



mit der Fourier-Reihe

$$U_1(t) = \frac{a}{2} + \frac{2\,a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2\,n+1)\omega t}{2\,n+1}$$

Ein zentraler Begriff in der Nachrichtentechnik ist der des **Spektrums** einer gegebenen Funktion. Für den einfachen Fall von periodischen Funktionen sind das einfach die Werte von a_i und b_i in der Fourierreihe als Funktion der Kreisfrequenz ω. Weil die Fourierkoeffizienten schon von der Definition her nur für die diskreten Werte $n \cdot \omega$ ungleich Null sein können, spricht man hier auch von einem **diskreten Spektrum**. Für unsere Funktion U_0 erhält man zum Beispiel:



Im Zusammenhang mit der Fouriertransformation werden wir sehen, dass Spektren auch 'echte' Funktionen der Kreisfrequenz ω sein können, wobei als Funktionswerte sogar komplexe Zahlen auftreten können. Dies liegt daran, dass in der Technik neben der Darstellung der Fouriereihe mit Sinus- und Cosinusfunktionen eine andere Repräsentation üblich, die komplexe Zahlen als Koeffizienten hat und mit der komplexen Exponentialfunktion arbeitet. Wie (hoffentlich) aus der Mathematik bekannt gilt die Formel [1]:

$$e^{j\,\phi} = \cos\phi + j\,\sin\phi$$

Damit lässt sich die Fourierreihe einer periodischen Funktion formal auch schreiben als

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos\nu\omega t + b_\nu \sin\nu\omega t) \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{j\nu\omega\, t} \end{aligned}$$

mit

$$c_\nu = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_\nu - j\,b_\nu) & \text{für } \nu \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-\nu} + j\,b_{-\nu}) & \text{für } \nu < 0 \end{cases}$$

Das lässt sich allgemein auch schreiben als:

$$c_\nu = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\,\nu\omega t}dt$$

[1] Wir schreiben hier wie in der Nachrichten- und Elektrotechnik üblich j statt i für die komplexe Einheit

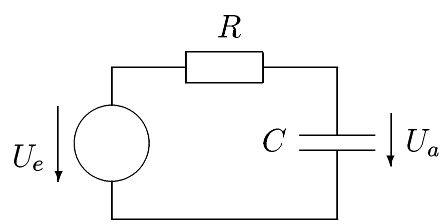
Insbesondere ist dann z.B.

$$U_1(t) \quad = \quad \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{j\,(2n+1)\omega t}/(2n+1)$$

Auch hier ließe sich wieder das diskrete Spektrum angeben, das hier symetrisch zur y-Achse liegt, weil in U_1 nur Cosinus-Funktionen auftreten. Man beachte dabei, dass als Preis dafür, dass man mit komplexen Zahlen arbeitet und eine kompakte Darstellung für die Fourierreihe hat, jetzt auch (eigentlich physikalisch sinnlose) negative Frequenzen auftreten (man beachte das z.B. in Versuch T4.2.4).

An dieser Stelle fragt man sich, ob sich der Aufwand überhaupt lohnt, und tatsächlich lässt sich all das, was jetzt noch folgt, auch (fast) ohne komplexe Zahlen durchrechnen, wobei man dann z.B. statt der Fouriertransformation zwei Integrale hat, in denen Sinus- und Cosinusfunktionen auftreten. Wir gehen hier aber den Weg, der sich in der Nachrichtentechnik und allgemein Systemtheorie durchgesetzt hat. Man sollte sich auch nicht zu sehr von den komplexen Zahlen, die immer wieder auftreten, abschrecken lassen. Wenn man sich sagt, dass der Realteil immer einer Cosinus- und der Imaginärteil einer überlagerten Sinusschwingung der gleichen Kreisfrequenz entspricht, wird meist schon einiges klarer. Trotzdem bleibt die Frage, was sich mit unseren Fourierreihen überhaupt anfangen lässt. Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel aus der Elektotechnik.

Gegeben sei die folgende Schaltung:



Wie sieht dann die Ausgangsspannung U_a, wenn wir für die Spannung U_e unser oben definiertes periodisches Rechteck U_1 wählen?

Im ersten Moment erscheint das eine schwer lösbare Aufgabe zu sein, zumal U_1 noch nicht einmal überall differenzierbar ist und es darum nicht ganz unproblematisch zu sein scheint, im konkreten Fall U_a über die entsprechende Differentialgleichung zu berechnen, die sich hier noch relativ leicht aufstellen lässt. Nicht einmal das ist aber nötig, sondern man braucht eigentlich nur die Fourierreihe für U_1, um die entsprechende Fourierreihe für U_a zu berechnen. Für komplizierte Schaltungen war das, bevor es Computer und entsprechende Programme gab, oft der einzige Weg, um überhaupt schnell zu einer Näherungslösungs zu kommen. Sehen wir uns also an, wie man formal vorgeht (Zumindest, wer bei Frau Mertsching die T2-Vorlesung gehört hat, sollte ungefähr verstehen, worum es geht). Offenbar lässt sich die Schaltung als Spannungsteiler interpretieren, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}\frac{U_a}{U_e} &= \frac{1/C\,\omega\,j}{R+1/C\,\omega\,j} \\ &= \frac{1}{1+RC\,\omega\,j} \\ &= \frac{1}{1+R^2C^2\omega^2} - \frac{RC\omega}{1+R^2C^2\omega^2}\,j\end{aligned}$$

oder mit $\tau = R\,C$

$$U_a = (\frac{1}{1+\tau^2\omega^2} - \frac{\tau\,\omega}{1+\tau^2\omega^2}\,j)\,U_e = A(\omega)\,U_e$$

Man kann jetzt zeigen, dass wie bei jeder Schaltung aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen U_a sinusförmig ist, wenn U_e sinusförmig ist, und der Betrag der komplexen Zahl $A(\omega)$ das Verhältnis der beiden Amplituden angibt.

Rein formal erhält man dann:

$$U_a(t) \;=\; \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n A((2n+1)\,\omega)\,e^{j\,(2n+1)\omega t}/(2n+1)$$

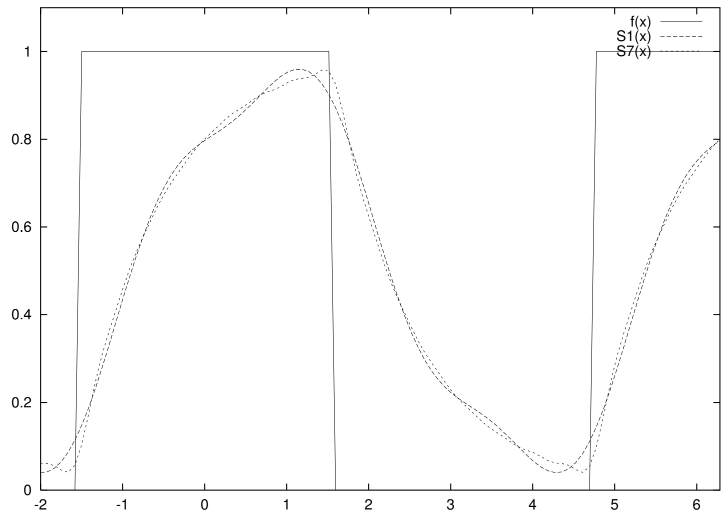
oder wieder als gewöhnliche Fourier-Reihe

$$U_a(t) = \frac{a}{2} + \frac{2\,a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)\omega\,t + \tau\,(2n+1)\omega\sin(2n+1)\omega\,t}{(2n+1)(1+\tau^2((2n+1)\omega)^2)}$$

So kompliziert diese Formel auch aussehen mag, letztlich ist es nur stupides Rechnen, was man braucht, um darauf zu kommen. Für alle, die Spaß daran haben, auch noch, was sich ergibt, wenn man $U_e(t) = U_0(t)$ wählt:

$$U_a(t) = \frac{a}{2} + \frac{2\,a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\omega\,t - \tau\,(2n+1)\omega\cos(2n+1)\omega\,t}{(2n+1)(1+\tau^2((2n+1)\omega)^2)}$$

Die folgende Grafik zeigt die Funktion $U_1(t)$ und $U_a(t)$ für $\omega = 2\,\pi$, wobei die Fourierreihe einmal nach dem zweiten und einmal nach dem siebten Glied abgebrochen worden ist.



Die Fouriertransformation

Für periodische Vorgänge haben wir mit den Fourier-Reihen ein adäquates Hilfsmittel gefunden, das es auch z.B. in der Elektrotechnik erlaubt, das bei linearen Netzwerken eine Aussage für ihr Verhalten zu machen. In der Nachrichtentechnik gilt das leider so nicht mehr, einfach, weil Nachrichten keine periodischen Vorgänge sind: Z.B. würde es schnell langweilig werden, immer dasselbe Sendung im Radio zu hören. Es stellt sich daher die Frage, ob sich nicht auch für nicht-periodische Vorgänge eine ähnliche Theorie aufbauen lässt. Dies ist in der Tat der Fall, wobei allerdings einige Einschränkungen und "Merkwürdigkeiten" zu beachten sind. Der recht naheliegende Grundgedanke ist dabei, sich zu fragen, was eigentlich mit unserer Fourierreihe geschieht, wenn man die Periode T immer größer machte, also den Grenzwert $T \to \infty$ bildet, denn dann ließen sich ja ein Signal $f(t)$ analysieren, das zeitlich beliebig ausgedehnt sein kann. Wenn diese Überlegung weiter verfolgt, geht die Fourierreihe in ein Integral über:

$$F(\omega\, j) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\,\omega\, t} dt$$

Man nennt dann $F(\omega\, j)$ die **Fouriertransformierte** oder die **Spektralfunktion** der Funktion $f(t)$ und spricht auch von einer Transformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich.

Betrachten wir ein Beispiel und zwar die Funktion

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist also (bitte nachrechnen!):

$$
\begin{aligned}
F_1(j\,\omega) &= \int_1^2 e^{-j\,\omega\,t} dt \\
&= \frac{j}{w}(e^{-2jw} - e^{-jw})
\end{aligned}
$$

Das folgende Bild zeigt den Betrag der Funktion $F_1(j\,w)$

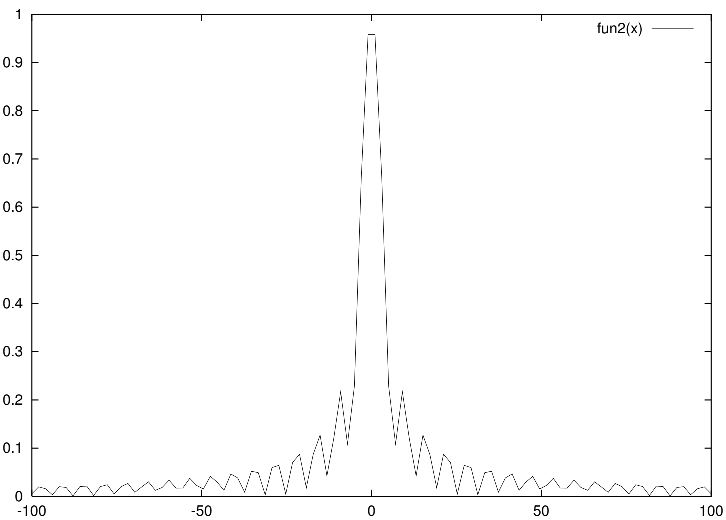
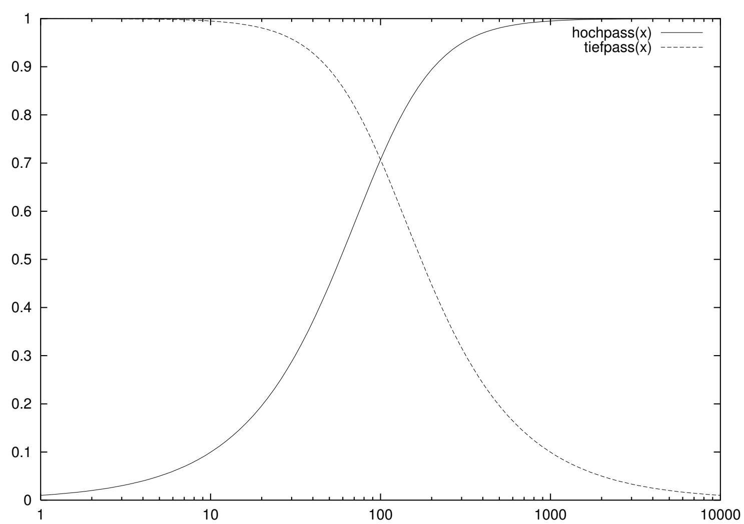


Bild 1

Die Frage ist natürlich, welche für die Praxis relevanten Informationen sich daraus ziehen lassen. Wie im Fall des diskreten Spektrums bei den Fourierreihen ist es auch hier so, dass man aus F_1 entnehmen kann, welche Frequenzen man mit welcher Amplitude und Phase brauchen würde, um die Funktion $f_1(t)$ vollständig, d.h. als sauberes Rechteck, zu übertragen. Da man aber nicht der einzige sein wird, der seine Informationen übertragen möchte, ist es sehr wahrscheinlich, dass es zu gegenseitiger Beeinflussung kommen wird, wenn jeder Sender wirklich alle Frequenzen zur Übertragung benutzt. Daraus folgt, dass man sich auf einen bestimmtes Frequenzband beschränken muss. Dies entspricht bei unserer Fourierreihe die Tatsache, dass kann man nicht alle Glieder, sondern nur endliche viele auswerten kann, aber immer noch so viel nehmen muss, dass das Ergebnis nicht zu sehr verfälscht wird. Sehen wir uns noch einmal das Bild des Betrags der Funktion F_1, so lässt sich sagen, dass die Funktionswerte nur langsam kleiner werden, so dass die Gefahr besteht, dass das Rechteck, das wir übertragen möchten, stark verfälscht wird, wenn man die hohen Frequenzen einfach abschneidet. Ob das wirklich so ist und was ‘hoch’ konkret bedeutet, soll hier nicht diskutiert werden, zumal auch davon abhängt, welche Übertragungsqualität man überhaupt erwartet.

Machen wir diese Überlegungen an einem konkreten Beispiel fest und betrachten wieder unser RC-Glied mit $U_e(t) = f_1(t)$. Damit unsere Nachricht (das Rechteck) sauber übertragen wird, also gilt $U_a(t) = U_e(t)$, muss sich offenbar der Kondensator schnell auf- und entladen können, was heißt, dass $\tau = R \cdot C$ klein gegenüber der Länge des Rechtecks sein muss.

Zum anderen weiß man vielleicht noch aus Versuch T2-4, dass sich unser RC-Glied auch als sog. **Tiefpass** interpretieren lässt, d.h. eine sinusförmige Spannung U_e wird umso besser übertragen, desto kleiner ihre Frequenz ist. Vielleicht erinnert man sich noch an folgendes Bild, wobei auf der x-Achse die Kreisfrequenz ω und auf der y-Achse das Verhältnis A der Amplituden von U_a zu U_e liegt:



und den Begriff der Grenzfrequenz ω_g, die bei der Kreisfrequenz liegt, wo gilt $A = 1/\sqrt{2}$. In obigen Bild ist also $\omega_g = 100\,1/s$. ω_g lässt sich hier auch explizit als Funktion von R und C berechnen:

$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

Wenn man sich jetzt die Fouriertransformierte unseres Rechtecks ansieht, dann hatten wir gesagt, dass auch noch hohe Frequenzen notwendig sind, damit unser Rechteck sauber übertragen wird. Das bedeutet aber, dass wir dafür sorgen müssen, dass unser Tiefpass sie noch mit einer ausreichend großen Amplitude durchlässt. Wir müssen also unser ω_g groß wählen und damit $R \cdot C$ klein, wie wir es uns oben auch schon überlegt hatten.

Entsprechend kann man sich überlegen, dass beim entsprechenden **Hochpass** (R und C in der Schaltung vertauscht), bei dem die großen Frequenzen besser übertragen werden als die kleinen und sich ω_g nach derselben Formel berechnet,

$R \cdot C$ groß sein muss, damit die kleinen Frequenz, die wie unserer Fouriertransformierten besonders wichtig für das Ausgangssignal sind, noch mit einer großen Amplitude übertragen werden.

Wenden wir uns jetzt einem anderen Problem zu, bei dem uns möglicherweise die Fouriertransformation helfen kann. Wir hatten oben bei den Fourierreihen gesehen, dass sich bei unserem RC-Glied (und prinzipiell bei jeder Schaltung aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen) die Ausgangsspannung U_a zumindest näherungsweise berechnen lässt, wenn man die Fourierententwicklung von U_e kennt. Wenn die Fouriertransformation eine Verallgemeinerung auf nichtperiodische Signale sein soll, müsste etwas Ähnliches jetzt auch möglich sein. Bevor wir uns diesem Problem zuwenden, stellt sich natürlich die Frage, wie man von der Fouriertransformierten $F(j\,\omega)$ im Frequenzbereich wieder auf die ursprüngliche Funktion $f(t)$ in Zeitbereich zurückkommt. Hier soll nur das Ergebnis angeben werden:

Wenn gilt

$$F(\omega\, j) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\,\omega\,t} dt$$

dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\,\omega)\, e^{j\,\omega\,t} d\omega$$

An dieser Stelle ist es auch nützlich, eine Funktion einzuführen, die auch in den Versuchen mehrfach auftritt (z.B. in T4-3.1 und T4-3.2). Es ist dies die **Heaviside-Funktion** H(t) (auch Einheitssprung genannt), die definiert ist als

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

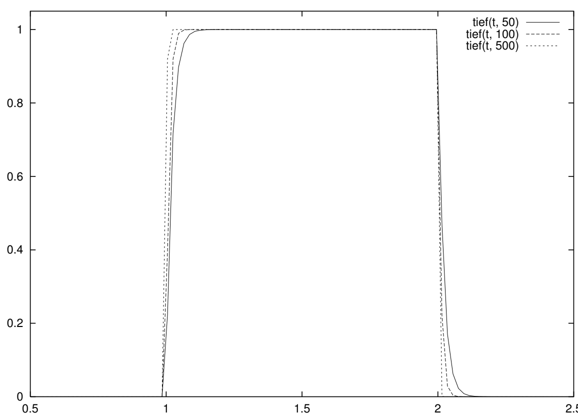
Unserer Rechteck lässt sich dann auch schreiben als

$$f_1(t) = H(t-1) - H(t-2)$$

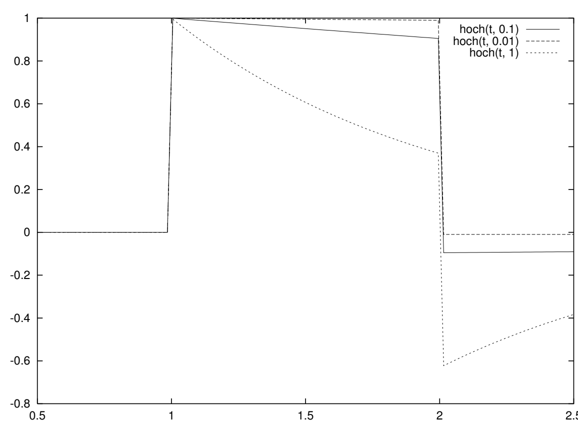
Kommen wir jetzt also zurück auf unser Problem, wie U_a für $U_e = f_1(t)$ aussieht. Es zeigt sich, dass man hier wirklich ebenso vorgehen kann, wie bei unseren Fourierreihen, indem man einfach unser $A(\omega)$ mit $F_1(j\,\omega)$ multipliziert und dann zurücktransformiert, wobei man fairerweise sagen sollte, dass das nicht unbedingt die typische Anwendung für die Fouriertransformation ist, weil mit der sog. Laplacetransformation zu diesem Zweck ein einfacher zu handhabendes Hilfsmittel zur Verfügung steht, aber in einfachen Fällen wie dem oben bekommt man noch zu Ergebnissen, auch wenn man auch dann besser ein Computertalgebrasystem wie MATLAB, MAPLE oder Mathematica zur Hilfe nimmt. Wenn man das tut, findet man mit $\tau = RC$ (wieder ohne eine einzige Differentialgleichung aufgestellt zu haben!):

$$U_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 1 \\ 1 - e^{-(t-1)/\tau} & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \\ e^{-(t-2)/\tau} - e^{-(t-1)/\tau} & \text{für } t > 2 \end{cases}$$

Sehen wir uns das einmal in einer Grafik an (der zweite Parameter ist jeweils die gewählte Grenzfrequenz ω_g):



Tiefpass



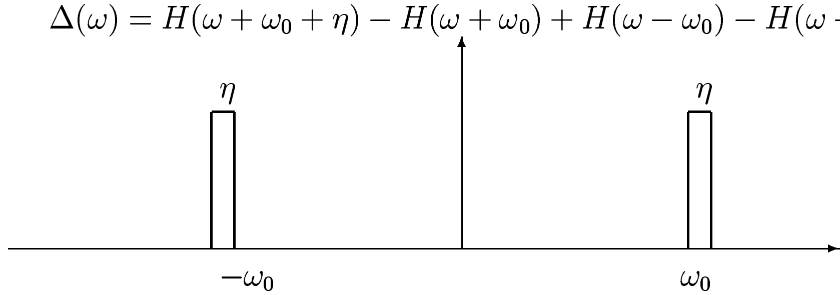
Hochpass

Wie man sieht, ist im gewählten Bereich der Tiefpass ziemlich unempfindlich gegen eine absolute Änderung von ω_g, während das beim Tiefpass anders ist. Wenn man sich unsere Fouriertransformierte in Bild 1 ansieht, erstaunt dieses Ergebnis wenig, weil wichtig für eine saubere Übertragung des Rechtecks gerade die kleinen Frequenzen sind, während man die großen mehr oder weniger unter den Tisch fallen lassen kann.

An diesem Punkt könnte man geneigt sein, sich erst einmal zufrieden zurückzulehnen, selbst wenn natürlich noch mehr als genug Probleme gibt. Vielleicht kommt man dann auch auf die Idee, einmal die Fouriertransformierte von $\cos \omega_0 t$ zu berechnen. Wenn die Fouriertransformation eine Verallgemeinerung der Fourierreihen sein soll, dann würde man als Ergebnis ein diskretes Spektrum mit zwei Werten ungleich Null bei den Frequenzen $-\omega_0$ und ω_0 erwarten. Leider zeigt es sich, dass dem keineswegs so ist, ja es zeigt sich sogar, dass die Fouriertransformierte zu unserem Cosinus gar nicht existiert, weil das Integral nicht konvergiert. Zum anderen ist es aber auch so, dass die inverse Fouriertransformierte einer Funktion, die nur an zwei Stellen von Null verschieden ist, gleich Null ist, weil das Integral zweier Funktionen, die sich nur in endlich vielen Punkten unterscheiden, gleich ist. Das scheint der ganzen Theorie, wenn man sie praktisch einsetzen möchte, einen schweren Schlag zu versetzen, weil gerade Sinus und Cosinus in der Nachrichtentechnik von zentraler Bedeutung sind, und darum muss man sich etwas überlegen, mit dem man dieses Problem umschiffen kann. Wegen der Bedeutung der ganzen Vorgehensweise soll das hier etwas breiter ausgeführt werden, statt einfach nur das (dann etwas willkürlich erscheinende) Ergebnis zu nennen.

Was man für die Fouriertransformierte eines Cosinus mit der Kreisfrequenz ω_0 erwartet ist wie gesagt ein diskretes Spektrum mit zwei Werten ungleich Null bei $-\omega_0$ und ω_0. Dies lässt sich mit der oben definierten Heavisidefunktion angenähert darstellen als Grenzwert $\eta \to 0$ der Funktionenfolge:

$$\Delta(\omega) = H(\omega + \omega_0 + \eta) - H(\omega + \omega_0) + H(\omega - \omega_0) - H(\omega - \omega_0 - \eta)$$



Ganz befriedigt dieser Ansatz aber auch noch nicht, weil mit $\eta \to 0$ auch die Fläche unter der Kurve gegen Null geht und man damit als Grenzwert die konstante Funktion 0 als inverse Fouriertransformierte erhalten würde. Darum betrachtet man statt der oben definierten Funktionen $\Delta(\omega)$ die folgenden mit $n \to \infty$ und $\eta = 1/n$:

$$\Delta_n(\omega) = n \cdot (H(\omega + \omega_0 + \eta) - H(\omega + \omega_0) + H(\omega - \omega_0) - H(\omega - \omega_0 - \eta)),$$

was dafür sorgt, dass die Fläche unter den beiden Rechtecken jeweils 1 ist. Bilden wir jetzt also die inverse Fouriertransformierte $C_n(t)$ für unsere Δ_n. Man findet dann:

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\eta}^{-\omega_0} \frac{1}{\eta}\, e^{j\omega\, t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0}^{\omega_0+\eta} \frac{1}{\eta}\, e^{j\omega\, t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi\eta\, j\, t}\,(e^{-\omega_0\, j\, t} - e^{-(\omega_0+\eta)\, j\, t} + e^{(\omega_0+\eta)\, j\, t} - e^{\omega_0\, j\, t}) \\
&= \frac{1}{\pi\eta\, t}\,(\sin(\omega_0+\eta)\, t - \sin\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Nach einem Cosinus sieht das zwar immer noch nicht aus, aber jetzt hilft ein Blick in eine Formelsammlung, denn es gilt

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

also

$$C_n(t) = \frac{2}{\pi\eta\, t}\,\cos\frac{(2\omega_0+\eta)\, t}{2}\,\sin\frac{\eta\, t}{2}$$

und mit $n \to \infty$ oder $\eta \to 0$ mit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/2}{x} = \frac{1}{2}$$

bis auf einen konstanten Faktor das gewünschte Ergebnis

$$C_\infty(t) = \frac{1}{\pi}\cos\omega_0 t$$

Man führt daher die sog. **Diracsche Deltafunktion** $\delta(x)$, die definiert ist durch

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und die zusätzliche Forderung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Es sei hier ausdrücklich betont, dass $\delta(x)$ **keine** Funktion im klassischen Sinn ist, sondern eine Hilfskonstruktion, die sich in der Physik und der Technik als äußerst hilfreich erweist, aber der Mathematik Jahrzehnte lang schwer im Magen gelegen hat, bis es ihr gelungen ist, mit den sog. Distributionen einen entsprechenden theoretischen Unterbau zu schaffen. Wie oben lässt sich $\delta(x)$ als Grenzwert $n \to \infty$ der Funktionenfolge

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auffassen. Die Fouriertransformierte von $\cos\omega_0 t$ lässt sich dann also schreiben als $\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$. Entsprechend ist die Fouriertransformierte von $\sin\omega_0 t$ die Funktion $j\,\pi(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0))$.

Insbesondere kann man sich jetzt auch fragen, was die Fouriertransformierte von $\delta(x-t_0)$ ist. Da auch diese Funktion nur an der Stelle t_0 ungleich Null ist, erhält man $e^{-j\,t_0\,\omega}$ und insbesondere für $t_0=0$, dass die Fouriertransformierte von $\delta(x)$ einfach 1 ist.

An dieser Stelle soll noch kurz darauf eingegangen werden, welche Bedeutung die Delta-Funktion in der Systemtheorie und Nachrichtentechnik noch hat. Durch $\delta(x-t_0$ lässt sich nämlich sehr gut ein kurzer Störimpuls zum Zeitpunkt t_0 modellieren. Die Reaktion des Systems auf diese Störung lässt sich dann wieder wie von unserem Rechteck schon bekannt aus der Übertragungsfunktions und der Fouriertransformierten der δ-Funktion berechnen, die gerade besonders einfach, nämlich 1 ist, was heißt, dass man nur die Übertragungsfunktion in den Zeitbereich zurücktransformieren muss, um Aussagen über das Verhalten bei Störungen zu erhalten. Dabei sollte man sich allerdings darüber klar sein, dass es sich zunächst einmal nur um ein Modell handelt und man damit etwas vorsichtig sein muss. Sehen wir uns das einmal am Beispiel unseres RC-Tiefpasses an, von dem wir annehmen wollen, dass wir $\omega_g = 100\,1/s$ gewählt haben.

$$S(t)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\,\omega\,t}}{1+0.01\,\omega\,j}\,d\omega = 100\,e^{-100\,t}\,H(t)$$

Der Wert von 100 an der Stelle $t=0$ ist natürlich bei einer “kleinen” Störung unrealistisch, aber viel wichtiger ist hier auch die Tatsache, dass $S(t)$ schnell gegen Null geht und sich damit die Störung nur kurz auswirkt, ohne ein Nutzsignal, das viel später übertragen wird noch zu beeinflussen. Dass das nicht so sein muss, zeigt das Beispiel einer Schaltung, bei der in unserem RC-Glied der Widerstand durch eine Spule ersetzt wird. Man erhält dann wie oben

$$U_a=\frac{1/Cwj}{Lw\,j+1/Cwj}U_e=\frac{1}{1-LC\,w^2}U_e$$

und bei einer Störung mit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

$$S(t)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\,\omega\,t}}{1-LC\,\omega^2}\,d\omega = \omega_0 H(t)\,\sin(\omega_0\,t)$$

also einen ungedämpften Sinus, der jedes später übertragene Nutzsignal beeinflussen wird.