Digitale Signalverarbeitung (2)

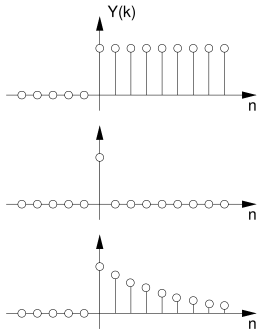
- Motivation
- analoge vs. digitale Signalverarbeitung
- Literatur

- Zahlenfolgen, LTI-Systeme
- Abtasttheorem
- Spektrum, FFT, Übertragungsfunktion
- Quantisierung, AD/DA Konverter, Dither

- Z-Transformation
- digitale Filter
- Dynamikbeeinflussung
- Raumsimulation, Hall

Zahlenfolgen, Elementarfolgen

Wertemenge {Y(k)}
Zuordnung: Index k -> Y(k)



wichtige "Elementarfolgen":

Impulsfolge
Sprungfolge
Exponentialfolge
Sinusfolge

lineare Systeme:

- Signale aus Elementarfolgen zusammensetzen
- Systemverhalten entsprechend berechenbar

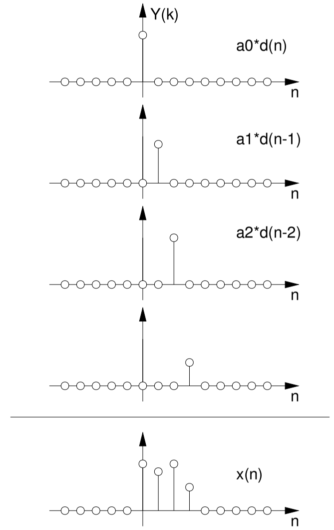
Impulsfolge:

Konstruktion beliebiger Zahlenfolgen:

- Summe
- skalierter
- zeitverschobener
  Impulsfolgen

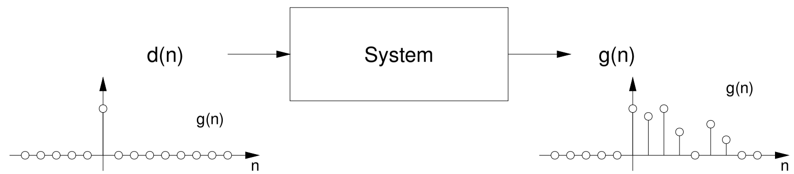
  x(n) = a0 * d(n) + a1 * d(n-1) + . . .

  gleichwertig: Konstruktion mit
- skalierten, zeitverschobenen
- Sprungfolgen



Impulsantwort

"Impulsantwort" := Ausgangsfolge als Reaktion auf die Impulsfolge



=> liefert vollständige Beschreibung von LTI-Systemen
"linear, time-invariant"
z.B. Verstärker, Filter, usw.
=> auch als lineare Approximation nichtlinearer Systeme

Differenzengleichungen

Berechnung des Ausgangswerts Y(n)

- aus gegenwärtigem Eingangswert X(n)
- aus früheren Eingangswerten X(n-k)
- aus früheren Ausgangswerten Y(n-k) (Rekursion)

- besonders wichtig: linear, konstante Koeffizienten, 2. Ordnung

  $y(n) = A0\ x(n) + A1\ x(n-1) + A2\ x(n-2) - B1\ y(n-1) - B2\ y(n-2)$

  Ordnung N: B1 .. BN kommen vor, A1 .. AM, M < N

- Übertragungsfunktion H(z) durch Z-Transformation:

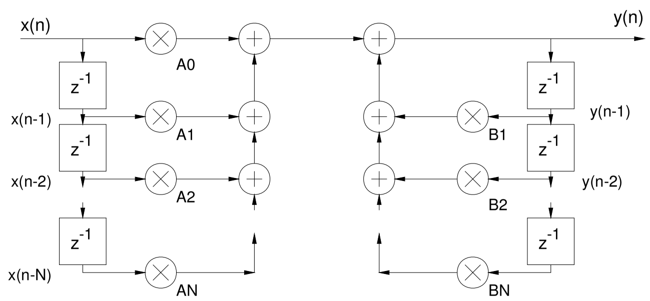
  $Y(z) = A0\ X(z) + A1\ X(z)/z + A2\ X(z)/z^2 - B1\ Y(z)/z + B2\ Y(z) / z^2$
  $H(z) = Y(z) / X(z)$

DGL: Direktform

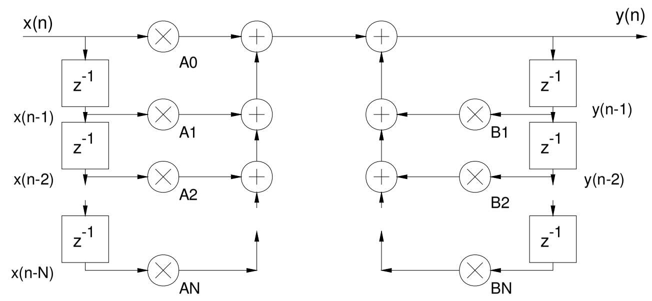
Differenzengleichungen, linear, konstante Koeffizienten
$y(n) = A0\ x(n) + A1\ x(n-1) + A2\ x(n-2) - B1\ y(n-1) - B2\ y(n-2)$

Umsetzung in "Direktform":

- Addition, Multiplikation, Verzögerung (=Register)



DGLs: Blockschaltbilder

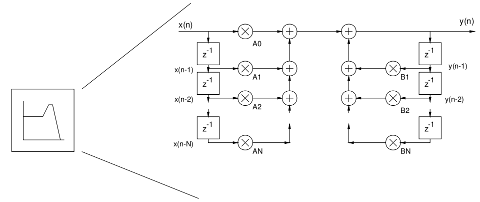


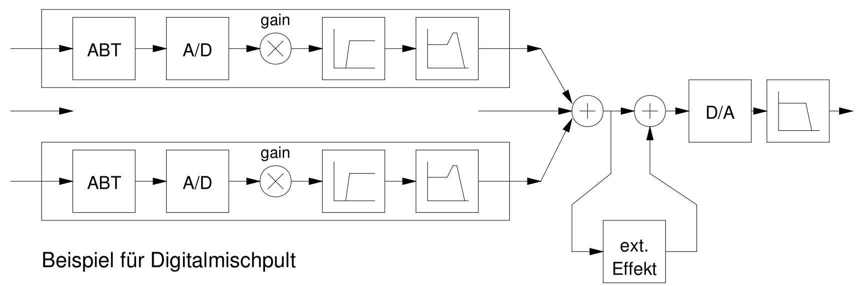
- Direktform erlaubt sofortige Realisierung von DSP-Algorithmen
- Varianten möglich (Vertauschen von Registern/Operatoren)
- bei Bedarf zusätzlich weitere (z.B. nicht-linerare) Operatoren

=> Darstellung mit Blockschaltbildern

Blockschaltbilder:

Hierarchiebildung





Beispiel für Digitalmischpult

Z-Transformation

Einer Zahlenfolge x(n) wird durch die unendliche Summe

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} \qquad (7.3)$$

eine gebrochen rationale Funktion X(z) zugeordnet. Beim praktischen Gebrauch dieser Transformation spielen Korrespondenztabellen eine wichtige Rolle. Man strebt an, die Transformation vom Folgenbereich in den z-Bereich sowie auch in umgekehrter Richtung mit Hilfe der Tabellen durchzuführen. Dabei soll wieder zwischen Korrespondenzen für die Zahlenfolgen und Korrespondenzen für die Rechenoperationen unterschieden werden.
In der Regel wird die Z-Transformation als einseitige Transformation durchgeführt. Dabei werden kausale Zahlenfolgen transformiert, d.h. Folgen, deren Elemente für n < 0 verschwinden.

- Umwandlung Differenzengleichung -> algebr. Gleichung

Z-Transformation: Tabelle

Folgenbereich	z-Bereich
$\varepsilon(n)\, e^{j\,2\pi f_o' n}$	$\frac{z}{z - e^{j\,2\pi f_o'}}$
$\varepsilon(n) \sin(2\pi f_o' n)$	$\frac{z \sin(2\pi f_o')}{z^2 - 2z\cos(2\pi f_o') + 1}$
$\varepsilon(n) \sin(2\pi f_o' n + \varphi)$	$\frac{z^2 \sin\varphi + z \sin(2\pi f_o' - \varphi)}{z^2 - 2z\cos(2\pi f_o') + 1}$
$\varepsilon(n) \cos(2\pi f_o' n)$	$\frac{z\,[z - \cos(2\pi f_o')]}{z^2 - 2z\cos(2\pi f_o') + 1}$
$\varepsilon(n)\, e^{\alpha n} \sin(2\pi f_o' n + \varphi)$	$z\,\frac{z \sin\varphi + e^{\alpha} \sin(2\pi f_o' - \varphi)}{z^2 - 2z e^{\alpha}\cos(2\pi f_o') + e^{2\alpha}}$
$\varepsilon(n)\, e^{\alpha n} \cos(2\pi f_o' n)$	$\frac{z\left[z - e^{\alpha}\cos(2\pi f_o')\right]}{z^2 - 2z e^{\alpha}\cos(2\pi f_o') + e^{2\alpha}}$
$\varepsilon(n)\, n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\varepsilon(n) \frac{1}{2} n^2$	$\frac{z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\varepsilon(n)\, n\, e^{\alpha n}$	$\frac{z e^{\alpha}}{\left[z - e^{\alpha}\right]^2}$

Z-Transformation: Tabelle

- Berechnung via Summation der Reihe oder aus Tabellen
- Rücktransformation via Partialbruchzerlegung und Tabellen

In den periodischen Funktionen der nachfolgenden Tabelle ist f_o' eine bezogene, dimensionslose Frequenz, die angibt, wieviele Folgenelemente auf eine Periode der Funktion entfallen.

Folgenbereich	z-Bereich
$f(n)$	$F(z)$
$\delta(n)$	1
$\varepsilon(n)$	$\frac{z}{z-1}$
$\varepsilon(n)\, e^{\alpha n}$	$\frac{z}{z - e^{\alpha}}$

Z-Transformation: Eigenschaften

7.2.3 Korrespondenzen der Rechenoperationen

$f(n) = 0$ für $n < 0$

Folgenbereich	z-Bereich	
$f(n)$ $f_1(n)$ $f_2(n)$	$F(z)$ $F_1(z)$ $F_2(z)$	Namen
$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$	$c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$	Linearität
$f(n - N)$	$z^{-N} F(z)$	Zeitverschiebung
$f_1(n) * f_2(n)$	$F_1(z)\, F_2(z)$	Faltung
$n\, f(n)$	$-z \frac{d\,F(z)}{d\,z}$	
$e^{\alpha n} f(n)$	$F\left[\frac{z}{e^{\alpha}}\right]$	Skalierung
$f(n) - f(n-1)$	$\frac{z-1}{z} F(z)$	Zeitdifferenz
$\sum_{k=0}^{n} f(k)$	$\frac{z}{z-1} F(z)$	Zeitmittelwert

Z-Transformation: Beispiel

- Differenzengleichung zweiter Ordnung:

  y(n) = A0 x(n) + A1 x(n-1) + A2 x(n-2) - B1 y(n-1) - B2 y(n-2)

- Linearität: gliedweise Transformation in den z-Bereich

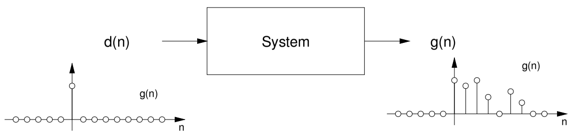
  Y(z) = A0 X(z) + A1 X(z)/z + A2 X(z)/z² - B1 Y(z)/z + B2 Y(z)/z²

- Übertragungsfunktion H(z) := Y(z) / X(z)

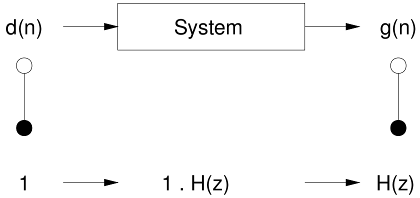
$$H(z) = \frac{A0 + A1/z + A2/z^2}{1 + B1/z + B2/z^2}$$

- Realisierung der Zeitverzögerung 1/z: einfaches Register

Impulsantwort - Übertragungsfunktion

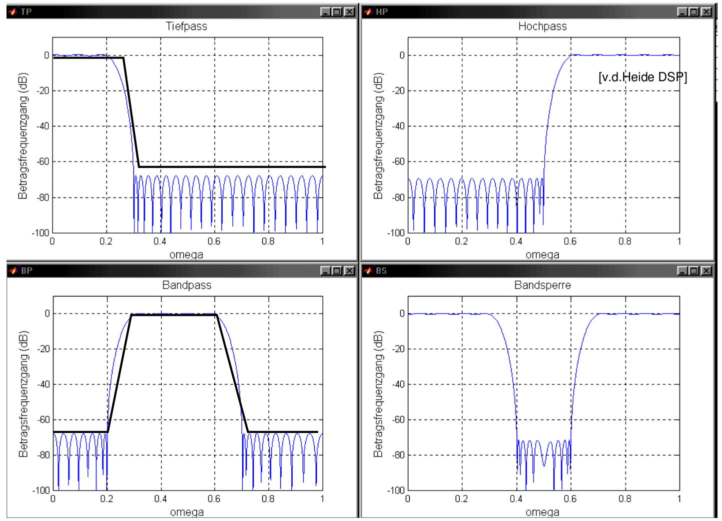


Beziehungen: Zeitbereich / Z-Bereich:

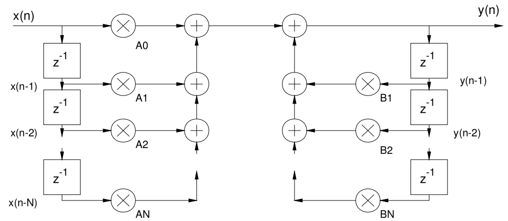


- Ausgangsfolge y(n): als Faltung x(n) * g(n)

Filter: Tiefpaß, Hochpaß, etc.



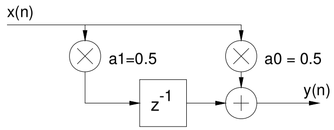
Filter: Frequenzgang

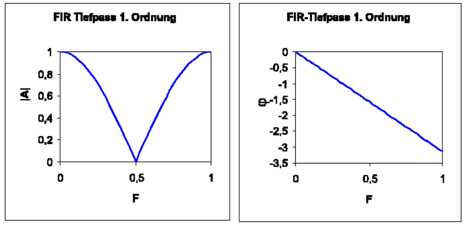


- normierte Frequenz F = f/FA
- direkte Berechnung des Frequenzgangs via H(z):

$$|\underline{A}\,(j\omega)| = \sqrt{\frac{\left[\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos 2\pi k F\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sin 2\pi k F\right]^2}{\left[\sum_{k=0}^{n} \beta_k \cos 2\pi k F\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{n} \beta_k \sin 2\pi k F\right]^2}}$$

Filter: FIR-Tiefpass



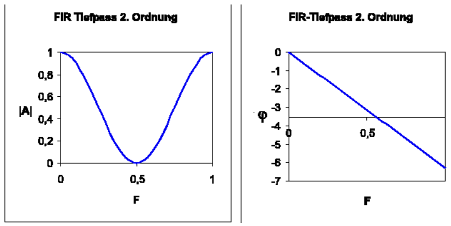


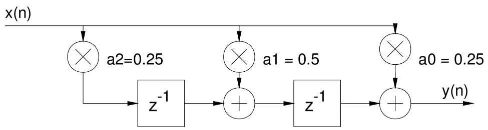
"minimale" Filterstruktur:

- zwei Koeffizienten, keine Rückkopplung

- Antwort auf x(n) = 1, 1, 1, 1 (f=0): y(n) = 1, 1, 1, 1, ...
- Antwort auf x(n) = 1,-1, 1, -1 (fmax): y(n) = 0, 0, 0, 0, ...

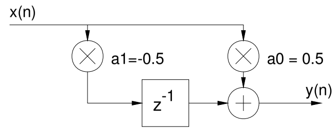
Filter: FIR-Tiefpass

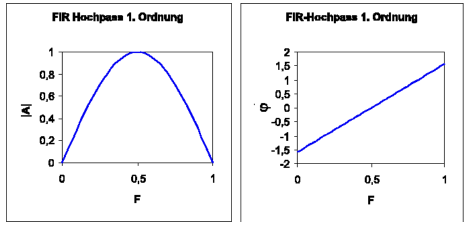




- Antwort auf x(n) = 1, 1, 1, 1 (f=0): y(n) = 1, 1, 1, 1, ...
- Antwort auf x(n) = 1,-1, 1, -1 (fmax): y(n) = 0, 0, 0, 0, ...

Filter: FIR-Hochpass



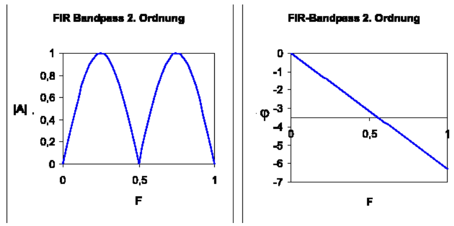


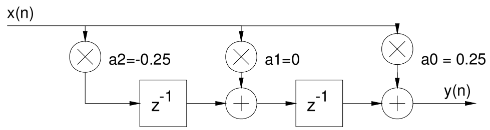
"minimale" Filterstruktur:

- zwei Koeffizienten, keine Rückkopplung

- Antwort auf x(n) = 1, 1, 1, 1 (f=0): y(n) = 0, 0, 0, 0, ...
- Antwort auf x(n) = 1,-1, 1, -1 (fmax): y(n) = 1, 1, 1, 1, ...

Filter: FIR-Bandpass





- Antwort auf x(n) = 1, 1, 1, 1 (f=0): y(n) = 0,0,0,0...
- Antwort auf x(n) = 1,-1, 1, -1 (fmax): y(n) = 0,0,0,0...

Filter: FIR - IIR

zwei fundamentale Filterarchitekturen: (siehe v.d.Heide DSP-VL)

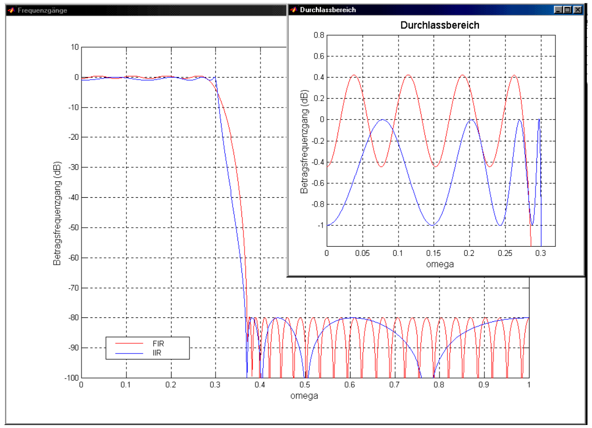
FIR, "finite impulse response"

- nichtrekursive Filter, y(n) = Summe A[k] * x(n-k)
- analog nicht realisierbar
- Ausgangssignal um N (N/2) Perioden verzögert
- Frequenz- und Phasengang separat wählbar

IIR, "infinite impulse response"

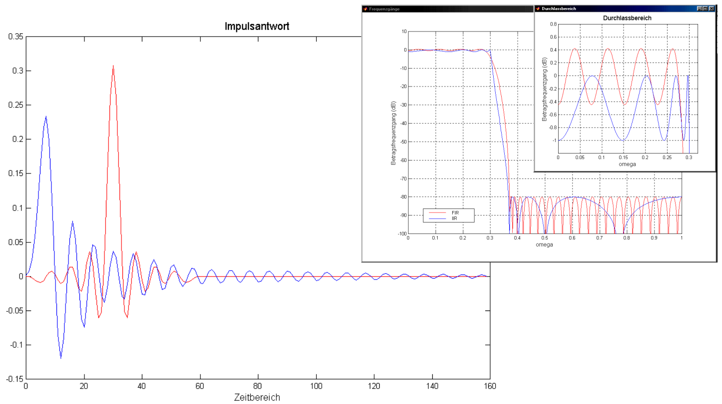
- rekursive Realisierung, y(n) abhängig von x(n-k) und y(n-m)
- Impulsantwort (im Prinzip) unendlich lang
- benötigt weniger Koeffizienten als "gleichwertiges" FIR-Filter
- evtl. Stabilitätsproblem (bzw.: resonanzfähig)
  (z.B. durch Quantisierung der Koeffizienten eines stabilen Filters)

Filter: Frequenzgang bei FIR / IIR



- "Ripple" im Durchlaß- und Sperrbereich
- Steilheit und Sperrdämpfung

Filter: Impulsantwort bei FIR / IIR



- Maximum der Impulsantwort bei FIR später als bei IIR (mehr Koeff.)
- sehr lange (infinite) Impulsantwort der IIR-Filters

Filter: Berechnung

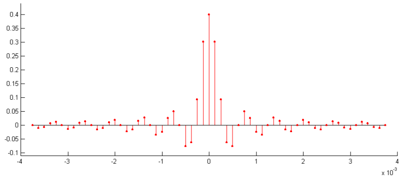
Eigenschaften der Filter voll durch die Koeffizienten A, B bestimmt

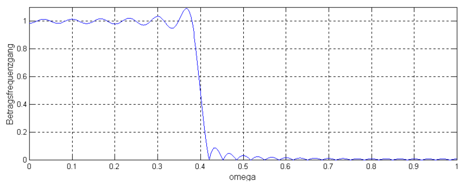
- diverse Algorithmen zur Berechnung der A, B
- abhängig von "Nebenbedingungen"

  Frequenzgang möglichst
- glatt
- steil
- minimaler "ripple" im Durchlaß- oder Sperrbereich
- etc.

- siehe Matlab-Demo Filterkennlinien

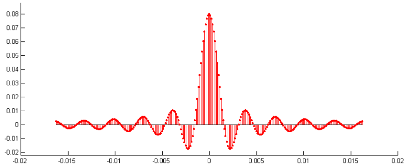
Filter: Anzahl der Koeffizienten (FIR)

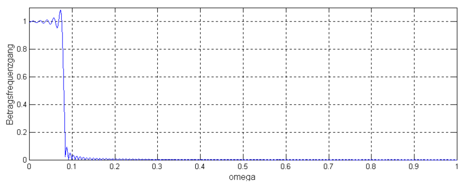




- geringe Anzahl der Koeffizienten
- Frequenzgang nicht sehr steil

Filter: Anzahl der Koeffizienten (FIR)





- geringe Anzahl der Koeffizienten
- Frequenzgang wesentlich steiler, immer noch "ripple"

Filter: Klangregelung

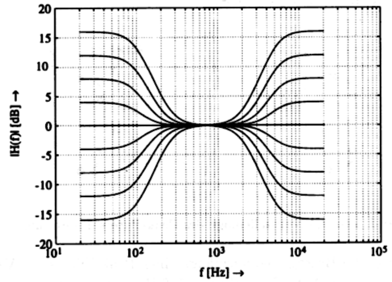


Bild 5.8: Frequenzgänge eines Tiefen/Höhen-Shelving-Filters - Tiefen-Shelving-Filter f_g =100 Hz (Parameter V_0), Höhen-Shelving-Filter f_g =5000 Hz (Parameter V_0)

- "Shelving"-Filter zur Klangregelung Höhen/Bässe
  zwei Parameter: Trennfrequenz und Verstärkung/Dämpfung
- Hervorheben einzelner Instrumente / einzelner Nuancen
- Hörbeispiele mit Erläuterungen: "keyboards mix-tricks" Serie

Filter: Koeffizienten

Transformation in den Z-Bereich. Zur Realisierung eines digitalen Filters wird die im S-Bereich entworfene Übertragungsfunktion $H(s)$ mit Hilfe einer geeigneten Transformation in eine Übertragungsfunktion $H(z)$ überführt. Die impulsinvariante Transformation ist nicht geeignet, da sie bei einer nicht auf die halbe Abtastfrequenz bandbegrenzten Übertragungsfunktion $H(s)$ auf Überlappungseffekte im Frequenzgang führt. Eine unabhängige Transformation von Pol- und Nullstellen von der S-Ebene in Pol- und Nullstellen in der Z-Ebene ist mit Hilfe der bilinearen Transformation

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{5.16}$$

möglich. Die folgende Tabelle 5.2 enthält die Koeffizienten der Übertragungsfunktion 2. Ordnung

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad , \tag{5.17}$$

die mit der bilinearen Transformation und der Hilfsgröße $K = \tan(\omega_g T/2)$ für die verschiedenen Filtertypen bestimmt sind. Strategien zur zeitvarianten Umschaltung von Audio-Filtern finden sich in [Zöl93].

Filter: Koeffiziententabelle

Tabelle 5.2: Audio-Filterentwurf

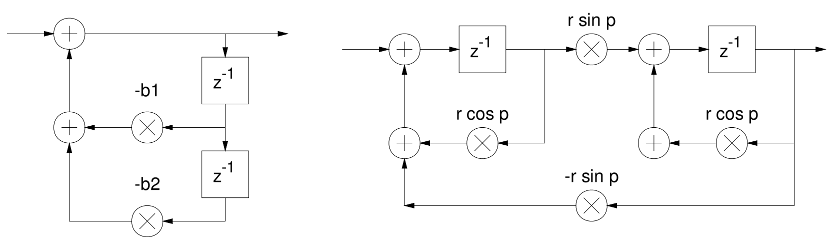
	a_0	a_1	a_2	b_1	b_2
Tiefpaß (2. Ordnung)	$\frac{K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$
Hochpaß (2. Ordnung)	$\frac{1}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{-2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{1}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$
Tiefenshelving (Anhebung $V_0 = 10^{G/20}$)	$\frac{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(V_0K^2-1)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$
Tiefenshelving (Absenkung $V_0 = 10^{-G/20}$)	$\frac{1+\sqrt{2}K+K^2}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2}K+K^2}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$	$\frac{2(V_0K^2-1)}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$
Höhenshelving (Anhebung $V_0 = 10^{G/20}$)	$\frac{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-V_0)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{V_0-\sqrt{2V_0}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$
Höhenshelving (Absenkung $V_0 = 10^{-G/20}$)	$\frac{1+\sqrt{2}K+K^2}{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2}K+K^2}{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}$	$\frac{2(K^2/V_0-1)}{1+\sqrt{2/V_0}K+K^2/V_0}$	$\frac{1-\sqrt{2/V_0}K+K^2/V_0}{1+\sqrt{2/V_0}K+K^2/V_0}$
Peak (Anhebung $V_0 = 10^{G/20}$)	$\frac{1+\frac{V_0}{Q_\infty}K+K^2}{1+\frac{1}{Q_\infty}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\frac{1}{Q_\infty}K+K^2}$	$\frac{1-\frac{V_0}{Q_\infty}K+K^2}{1+\frac{1}{Q_\infty}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\frac{1}{Q_\infty}K+K^2}$	$\frac{1-\frac{1}{Q_\infty}K+K^2}{1+\frac{1}{Q_\infty}K+K^2}$
Peak (Absenkung $V_0 = 10^{-G/20}$)	$\frac{1+\frac{1}{Q_\infty}K+K^2}{1+\frac{V_0}{Q_\infty}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\frac{V_0}{Q_\infty}K+K^2}$	$\frac{1-\frac{1}{Q_\infty}K+K^2}{1+\frac{V_0}{Q_\infty}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\frac{V_0}{Q_\infty}K+K^2}$	$\frac{1-\frac{V_0}{Q_\infty}K+K^2}{1+\frac{V_0}{Q_\infty}K+K^2}$

- alle üblichen Audiofilter

Filter: "Klang" digitaler Filter ?!

Klangvariationen digitaler Filter? ja, abhängig von

- Algorithmus (FIR, IIR)
- Architekturvarianten (Zölzer S. 148ff)
- Wortbreiten, Rundungsfehler



Dynamik-Bearbeitung

Anpassen der Dynamik (Pegeldifferenzen):

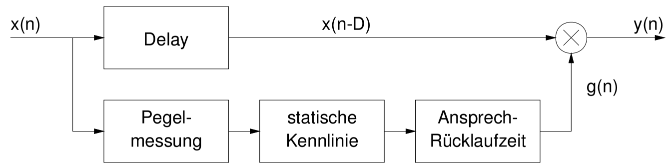
- Schutz vor Übersteuerung, z.B. von A/D-Wandlern
  "limiter"

- Unterdrückung kleiner Störsignale
  "noise gate"

- Anpassen großer Pegeldifferenzen an schlechteres System
- Optimierung der Lautheit (insb. Popmusik)
  "compressor"

- Anpassen an Umgebungseinflüsse
- Lautstärkeregelung im Auto

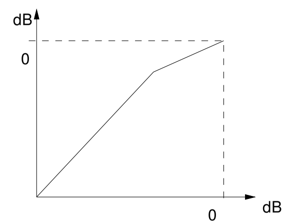
Dynamikbearbeitung: Blockschaltbild



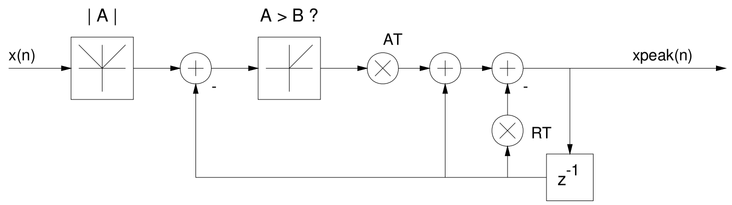
- analog: ohne Delay, daher Probleme bei schnellen Änderungen

- Kompressionsfaktor R = $\frac{d\,Px}{d\,Py}$

Limiter	unendlich
Compressor	R > 1
Expander	0 < R < 1
Noisegate	R = 0



Dynamik: Pegelmessung

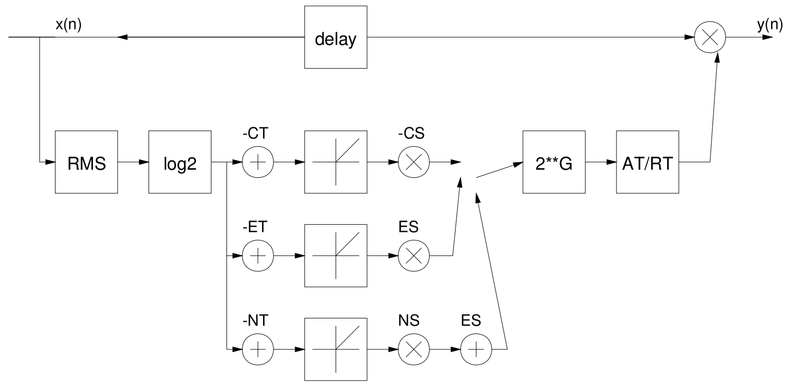


- Spitzenwertmessung:
  AT attack time
  RT release time

$$H(z) = \frac{AT}{1 - (1 - AT - RT) / z}$$

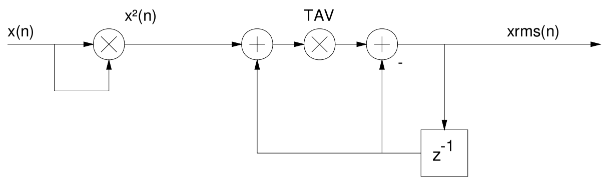
xpeak(n) = (1 - AT - RT) * xpeak(n-1) + AT * |x(n)|

Dynamik: Kompressor / Expander / Noisegate



- Schwellwertvergleich, dann Entscheidung K/E/N

Dynamik: Mittelwert Pegelmessung



- Mittelwertmessung:

$$H(z) = \frac{TAV}{1 - (1 - TAV) / z}$$

xrms(n) = (1 - TAV) * xrms(n-1) + TAV * x^2(n)

Kompression: Beispiel

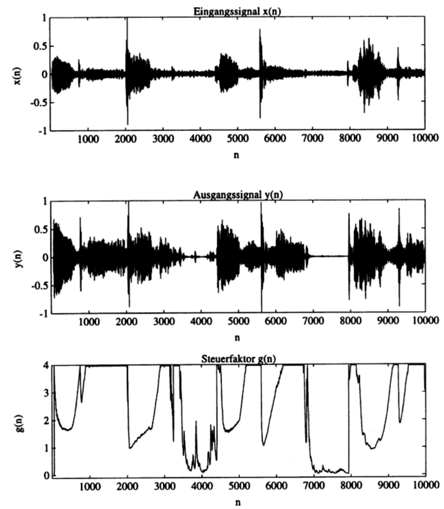
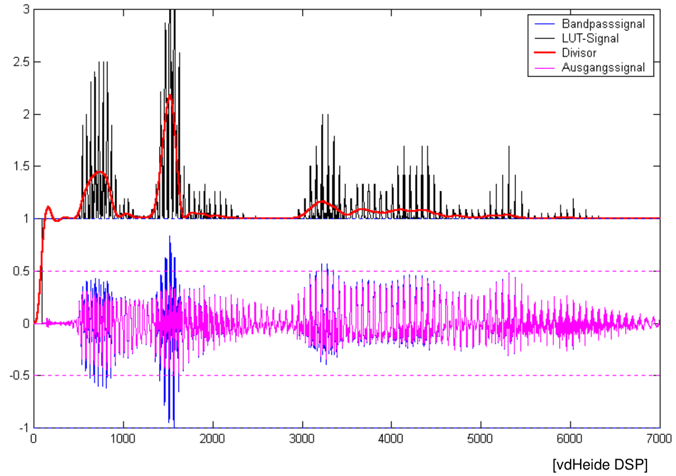


Bild 7.11: Zeitsignale $x(n)$, $y(n)$ und $g(n)$ der Dynamikbeeinflussung

[Zölzer]

Kompression: Beispiel

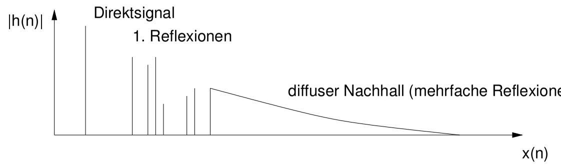


Raumsimulation, Hall

Raumsimulation := künstliche Erzeugung einer Raumakustik

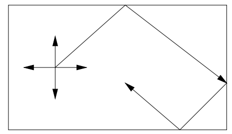
- Originalsignal
- Reflexionen an Wänden / anderen Objekten

- typischer Verlauf:

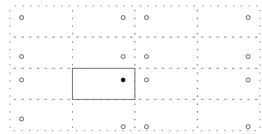


- Originalsignal, erste und mehrfache Reflexionen
- Klangverfärbung, insb. Höhendämpfung

Hall: Box-Modell



"Strahlen-Modell"



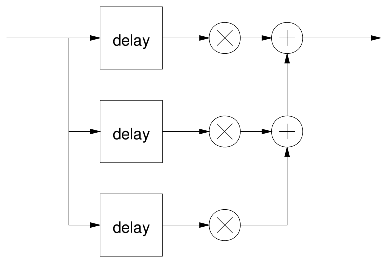
"Spiegelquellen"

- mathematisches Modell eines Raums (als Übertragungsfunktion)
- in einfachen Fällen (Box) exakt lösbar
- ansonsten numerische Näherung

- aber: "echter" Hall ist extrem aufwendig

=> Suche nach vereinfachten Algorithmen

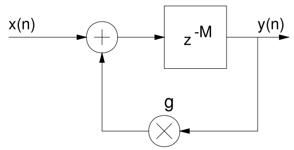
Hall: erste Reflexionen



- direktes Erzeugen der wichtigen ersten Reflexionen
- mit mehrfacher Verzögerung
- evtl. auch Stereo / räumlich differenziert

- "Räumlichkeit" := psychoakustische Bewertung der Reflexionen
- angenehme Werte abhängig vom Signal (Klassik Pop, Sprache, ...)

Hall: diffuser Nachhall



g: Rückkopplungsfaktor
M: Delay-Länge

Erzeugen des "diffusen" Hallanteils ?!

- zusammengesetzt aus sehr hoher Anzahl von Teilreflektionen
- direkte Simulation per delay/Faktor zu aufwendig
- Vereinfachungen notwendig

=> rekursive Filter, z.B. Kammfilter / Allpaßfilter [Schroeder 61]

- mit exponentiellem Abfall der Impulsantwort
- aber keine "Verdichtung" des Hallsignals

Hall: diffuser Nachhall

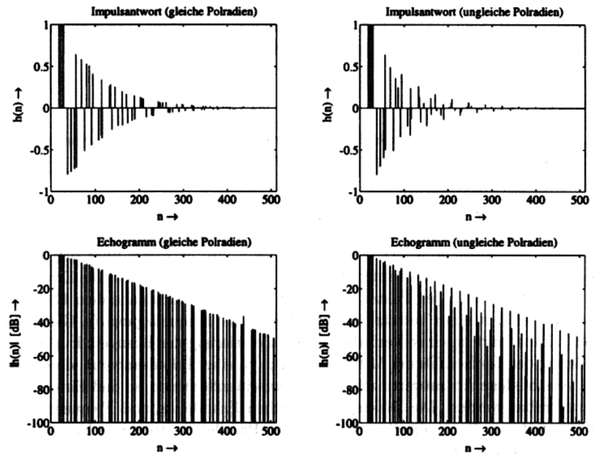
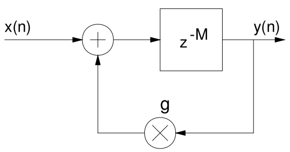


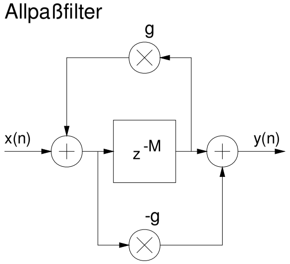
Bild 6.19: Impulsantwort und Echogramm (mehrere Kammfilter parallel)

Hall: Kammfilter / Allpaßfilter

Kammfilter



Allpaßfilter



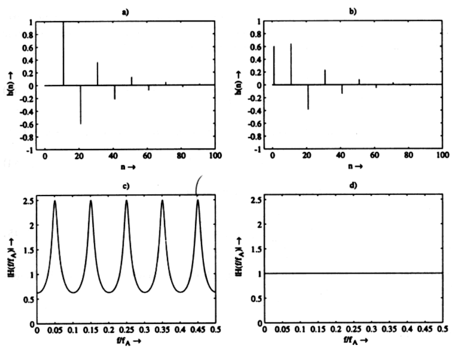
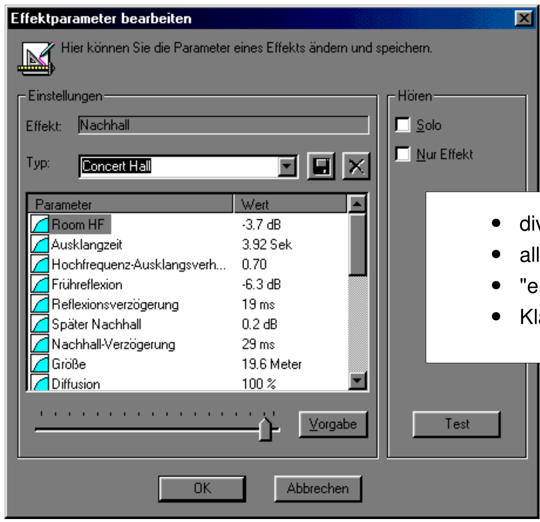


Bild 6.14: a) Impulsantwort Kammfilter (M=10, g=-0.6), b) Impulsantwort Allpaßfilter (M=10, g=-0.6), c) Betragsfrequenzgang Kammfilter, d) Betragsfrequenzgang Allpaßfilter

- jeweils Impulsantwort
- und Frequenzgang
- exp. Abklingen der Impulsantwort

Hall: Soundblaster Live



- diverse Presets
- alle Parameter regelbar
- "environmental audio"
- Klangbeispiele später