Übungen zu “Grundlagen der Signalverarbeitung und Robotik”
SoSe 2014

Übungsblatt 11

Ausgegeben am 3. Juli 2014
Abgabe der Lösungen (Papier oder elektronisch) bis Dienstag 8. Juli 12:00

Aufgabe 1:
Wir betrachten einen Würfel, auf dem nicht wie üblich die Zahlen 1 bis 6 stehen, sondern die Zahlen 1, 2 und 3 jeweils zwei Mal.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf eine 1 auftritt?

b) Wir würfeln dreimal mit dem Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Zahlen größer als 7 ist?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei drei Würfen keine 1 zu würfeln, genau einmal eine 1 zu würfeln, mindestens einmal eine 1 zu würfeln?

d) Was ist der Erwartungswert bei einem Wurf des Würfels?

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Wir betrachten wieder den Würfel aus Aufgabe 1 und würfeln zwei Mal.
Der Zufallsvariablen X weisen wir die höchste der beiden gewürfelten Zahlen zu und der Zufallsvariablen Y die Summe der beiden gewürfelten Zahlen.

a) Welchen Wert haben $p(X = 2), p(Y = 1), p(Y = 3)$ und $p(X = 2, Y = 3)$?
Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig voneinander? (Begründung!)
b) Wie groß sind die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$?
c) Welche Wert hat $Cov(X, Y)$?

Hinweis zu c): Die in der Vorlesung angegebene Formel

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))$$

lässt sich umschreiben zu

$$Cov(X, Y) = E(X, Y) - E(X)\,E(Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p(X = x_i, Y = y_j) - E(X)\,E(Y)$$

Was man jetzt braucht, ist eine $3 \cdot 5$-Matrix für die möglichen $p(x, y)$, wobei einige der Einträge auch 0 sein können (z.B. für p(X= 1, Y= 6)). Zur Kontrolle kann man noch die Summe über alle Einträge in der Matrix berechnen, die 1 sein muss.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
In einer Flüssigkeit F können drei Substanzen S_1 und S_2 gelöst sein und zwar in folgenden Kombinationen, die alle gleichwahrscheinlich sind:

K_0	Keins der S_i ist in F enthalten
K_1	nur S_1 ist in F enthalten
K_2	nur S_2 ist in F enthalten
K_3	S_1 und S_2 sind in F enthalten

Messen lassen sich die S_i immer nur einzeln, also nicht S_1 gleichzeitig mit S_2. Sei $Bel(K_i)$ der Believe, dass die Kombination K_i vorliegt und sei M_i das Ergebnis der Prüfung auf die Substanz S_i. Mögliche Ergebnisse sind dabei **1**, wenn S_i in F enthalten ist, und **0**, wenn S_i nicht in F enthalten ist.

a) Wie groß ist $Bel(K_1)$, bevor Sie irgendeine Messung gemacht haben?

b) Wie viele Messungen müssen Sie für $Bel(K_1) = 1$ machen, wenn alle Messungen fehlerfrei sind?

c) Sei jetzt jede Messung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 fehlerfrei. Berechnen Sie mit Hilfe des Bayes-Filter-Algorithmus, wie groß $Bel(K_1)$ ist, wenn Sie folgende Messergebnisse erhalten haben:

c1) $M_1 = \mathbf{1}$ (eine Messung)
c2) $M_1 = \mathbf{1}, M_2 = \mathbf{0}$ (zwei Messungen)
c3) $M_1 = \mathbf{1}, M_2 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{1}$ (drei Messungen)

(10 Punkte)